Logica Matematica
4.3 – Conseguenza logica, validità, soddisfacibilità

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Conseguenza logica

Dati $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}(L)$ e $\mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}(L)$, diciamo che Q è **conseguenza logica** di Γ, in simboli

$$\Gamma \models \mathrm{Q},$$

se per ogni interpretazione i, se $i \models \Gamma$ allora $i \models \mathrm{Q}$. Scriviamo $\Gamma \not\models \mathrm{Q}$ per dire che Q NON è conseguenza logica di Γ.

- Quando $\Gamma = \{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$ è un insieme finito, allora scriviamo semplicemente

  $$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$

  invece di $\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\} \models \mathrm{Q}$ e diciamo che Q è conseguenza logica delle proposizioni P_1, …, P_n. In particolare, quando $\Gamma = \{\mathrm{P}\}$ scriviamo $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e diciamo che Q è conseguenza logica di P.
- È immediato verificare che

  $$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q} \quad \text{se e solo se} \quad \models (\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n) \to \mathrm{Q}.$$

Teorema

1. P *è valida (ovvero una tautologia) se e solo se* $\neg\mathrm{P}$ *è insoddisfacibile.*
2. P *è soddisfacibile se e solo se* $\neg\mathrm{P}$ *non è valido,*
3. $\Gamma \models \mathrm{Q}$ *se e solo se* $\Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$ *è insoddisfacibile.*

Dimostrazione.

1 e 2 sono ovvie.

Dimostriamo che vale anche 3. Assumiamo che $\Gamma \models \mathrm{Q}$, e supponiamo per assurdo che $\Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$ sia soddisfacibile, ovvero che esista un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$. Allora si avrebbe che, in particolare, $i \models \neg\mathrm{Q}$ e $i \models \mathrm{Q}$ (poiché $i \models \Gamma$ e $\Gamma \models \mathrm{Q}$), contraddizione.

(continua...)

Teorema

1. P *è valida (ovvero una tautologia) se e solo se* $\neg\mathrm{P}$ *è insoddisfacibile.*
2. P *è soddisfacibile se e solo se* $\neg\mathrm{P}$ *non è valido,*
3. $\Gamma \models \mathrm{Q}$ *se e solo se* $\Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$ *è insoddisfacibile.*

Dimostrazione (continuazione)

Assumiamo ora che $\Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$ sia insoddisfacibile, e consideriamo una generica interpretazione i tale che $i \models \Gamma$: vogliamo mostrare che allora si deve avere anche $i \models \mathrm{Q}$, cosicché $\Gamma \models \mathrm{Q}$ per la genericità di i. Poiché $i \not\models \Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\}$ e $i \models \Gamma$, allora $i \not\models \neg\mathrm{Q}$. Quindi $i \models \mathrm{Q}$, come volevamo. □

Se $\Gamma = \{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ è un insieme finito, si può anche osservare direttamente che

$$\begin{array}{lll} \Gamma \models \mathrm{Q} & \text{se e solo se} & (\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n) \to \mathrm{Q} \text{ è valida} \\ & \text{se e solo se} & \neg[(\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n) \to \mathrm{Q}] \text{ è insoddisfacibile} \\ & \text{se e solo se} & \mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \wedge \neg\mathrm{Q} \text{ è insoddisfacibile} \\ & \text{se e solo se} & \Gamma \cup \{\neg\mathrm{Q}\} \text{ è insoddisfacibile.} \end{array}$$

Equivalenza logica

Date $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}(L)$ si dice che P e Q sono **logicamente equivalenti**, e si scrive

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q},$$

se per ogni interpretazione i si ha $i \models \mathrm{P}$ se e solo se $i \models \mathrm{Q}$. Scriviamo $\mathrm{P} \not\equiv \mathrm{Q}$ per dire che P e Q NON sono logicamente equivalenti.

Si noti che

- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $\models \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$.
- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{P}$.
- $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ se e solo se $i^*(\mathrm{P}) = i^*(\mathrm{Q})$ per ogni interpretazione i.

Osservazione

Per quanto visto, è possibile verificare se

$$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q} \qquad \text{oppure} \qquad \mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$$

utilizzando le tavole di verità.

Tuttavia bisogna impostare un'*unica* tavola di verità in cui valutare simultaneamente *tutte* le proposizioni coinvolte, e non solo calcolare le tavole di verità delle singole proposizioni una alla volta.

Questo perché per stabilire se valgano o meno le relazioni di conseguenza logica ed equivalenza logica bisogna considerare le interpretazioni definite su *tutte* le lettere proposizionali che compaiono in almeno una delle formule $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$, Q oppure P, Q, rispettivamente.

Esempio

Per verificare se

$$A \vee (B \to C) \models A \wedge B$$

bisogna impostare la seguente tavola di verità:

A	B	C	$B \to C$	$A \vee (B \to C)$	$A \wedge B$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

e poi osservare che $A \vee (B \to C) \not\models A \wedge B$ perché, ad esempio, l'interpretazione $i(A) = i(B) = i(C) = 0$ (che corrisponde alla prima riga della tavola di verità) è tale che $i^*(A \vee (B \to C)) = 1$ ma $i^*(A \wedge B) = 0$.

Ricapitolando...

La **logica proposizionale** ci permette un'analisi logica del ragionamento (matematico) procedendo come segue.

1. Si introduce un **linguaggio** "artificiale" L i cui elementi (le lettere proposizionali A, B, $\dots$) rappresentano le proposizioni atomiche, ovvero quelle non ulteriormente analizzabili mediante l'uso dei connettivi.
2. Si considerano i **connettivi**, particolari costanti logiche che permettono di "collegare" una o più proposizioni per formarne di nuove.
3. Si introduce il concetto *sintattico* di **formula proposizionale** (o **proposizione**): si introducono regole algoritmiche per costruire e analizzare stringhe di simboli "ben formate", ovvero tali da poter essere dotate di significato e a cui si può di conseguenza assegnare un valore di verità a partire dall'interpretazione dei suoi elementi costitutivi (ovvero a partire dall'interpretazione delle lettere proposizionali che vi occorrono).

Ricapitolando...

4. Si introduce il concetto *semantico* di **modello**, ovvero di una situazione o realtà (astratta) in cui interpretare le formule proposizionali per vedere se, in tale contesto, siano vere o false. In logica proposizionale, questo è realizzato mediante la nozione di **interpretazione**, ovvero di un assegnamento i di valori di verità a *tutte* le lettere proposizionali nel linguaggio L.
5. A partire dall'interpretazione i, si definiscono le regole che permettono di calcolare il valore di verità di ogni formula proposizionale nel modello dato (**valutazione** $v = i^*$ e relazione di soddisfazione $\models$).
6. Considerando insieme vari modelli possibili (ovvero varie interpretazioni), si definiscono i concetti di **tautologia**, **contraddizione**, **soddisfacibilità**, **conseguenza logica** e **equivalenza logica**. In particolare, la conseguenza logica $P \models Q$ dà una formulazione matematicamente precisa della nozione intuitiva di "deduzione corretta": $P \models Q$ significa che dall'ipotesi che P sia vera possiamo concludere che anche la tesi Q deve essere vera.

Ricapitolando...

In questo modo si possono analizzare ragionamenti apparentemente complessi ed evitare errori "logici".

Esempio

A prima vista, il seguento ragionamento sembrerebbe corretto:

> *Se io ho ragione tu hai torto, e se tu hai ragione io ho torto: quindi almeno uno di noi due ha ragione.*

Consideriamo il linguaggio $L = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ dove

$\mathrm{A} =$ "io ho ragione" $\qquad$ $\mathrm{B} =$ "tu hai ragione"

("avere torto" $=$ "non avere ragione")

Otteniamo la formula proposizionale $(A \to \neg B) \wedge (B \to \neg A) \to A \vee B$.

È sempre vera ($=$ una tautologia)? No, l'interpretazione $i(\mathrm{A}) = i(\mathrm{B}) = 0$ ("entrambi abbiamo torto") descrive una situazione in cui la proposizione, ovvero il ragionamento dato, non è corretto.