Logica Matematica
2.2 – Relazioni

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Relazioni

Definizione

Sia $n \geq 1$. Una **relazione n-aria** è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano della forma $A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$. Se gli insiemi $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sono tutti lo stesso insieme A, parleremo di relazione n-aria **su** A.

Se $n = 1$ parleremo di **relazione unaria** o **predicato**, se $n = 2$ parleremo di **relazione binaria**, se $n = 3$ parleremo di **relazione ternaria**, ecc...

Sia $R \subseteq A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$ una relazione n-aria. Diciamo che gli elementi $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sono in relazione R se $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R$.

Spesso le relazioni binarie si dicono semplicemente relazioni e si scrive

$$a \; R \; b$$

invece di $(a, b) \in R$.

Dominio e immagine di relazioni binarie

Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione binaria.

- Il sottoinsieme di A definito da

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \in A \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } b \in B\}$$

è detto **dominio** della relazione R.

- Il sottoinsieme di B definito da

$$\mathrm{rng}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R \text{ per qualche } a \in A\}$$

è detto **range** o **immagine** della relazione R.

Relazione inversa

Se $R \subseteq A \times B$ è una relazione (binaria), allora la **relazione inversa** di R, che indichiamo con R^{-1} e che è ancora una relazione binaria, è il sottoinsieme di $B \times A$ definito da

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

In altre parole, per ogni $b \in B$ e $a \in A$ si ha

$$b \; R^{-1} \; a \qquad \text{se e solo se} \qquad a \; R \; b.$$

Chiaramente per ogni relazione binaria R

$$(R^{-1})^{-1} = R, \qquad \operatorname{rng}(R^{-1}) = \operatorname{dom}(R), \qquad \operatorname{dom}(R^{-1}) = \operatorname{rng}(R).$$

Esempio

Se R è la relazione $\leq$ di minore o uguale su $\mathbb{N}$, allora R^{-1} è la relazione $\geq$ di maggiore o uguale su $\mathbb{N}$.

Alcune proprietà

Definizione

Diremo che una relazione (binaria) R su un insieme A è

- **riflessiva** se $a \mathrel{R} a$ per ogni $a \in A$;
- **simmetrica** se da $a \mathrel{R} b$ segue che $b \mathrel{R} a$;
- **antisimmetrica** se da $a \mathrel{R} b$ e $b \mathrel{R} a$ segue che $a = b$;
- **transitiva** se da $a \mathrel{R} b$ e $b \mathrel{R} c$ segue che $a \mathrel{R} c$.

Osservazione: Una relazione R su un insieme A è simmetrica se e solo se $R = R^{-1}$, ovvero se per ogni $(a, b) \in A^2$

$$a \mathrel{R} b \qquad \text{se e solo se} \qquad a \mathrel{R^{-1}} b.$$

Inoltre, R è riflessiva/simmetrica/antisimmetrica/transitiva se e solo se R^{-1} lo è.

Relazioni d'equivalenza

Definizione

Una **relazione di equivalenza su** A è una relazione (binaria) riflessiva, simmetrica e transitiva su A.

Oltre ad utilizzare lettere maiuscole come E, F, ecc..., per indicare relazioni d'equivalenza spesso useremo simboli che in qualche misura richiamano la relazione d'uguaglianza, quali ad esempio

$$\equiv \qquad \sim \qquad \simeq \qquad \cong \qquad \approx \qquad \dots$$

Quando vorremo esplicitare l'insieme A su cui è definita la relazione d'equivalenza E scriveremo $\langle A, E\rangle$.

Classi di equivalenza e insieme quoziente

Sia E una relazione di equivalenza su A. La **classe di equivalenza** di un elemento $a \in A$ rispetto ad E è

$$[a]_E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \mathrel{E} a\} .$$

Quando la relazione E è chiara dal contesto, si può scrivere solo $[a]$ invece di $[a]_E$.

L'**insieme quoziente** è l'insieme di tutte le classi di equivalenza:

$$A/E \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_E \mid a \in A\} .$$

L'insieme quoziente è una famiglia di sottoinsiemi di A, cioè $A/E \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Esempio: campionato di serie A

Sia X l'insieme di tutti i giocatori di squadre di serie A. Definiamo ora una relazione binaria E sull'insieme X stabilendo che $a \mathrel{E} b$ se e solo se a e b giocano nella stessa squadra.

La relazione E è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza su X.

- Le classi di equivalenza sono le squadre del campionato di serie A.
- Il quoziente X/E consiste nel campionato di serie A, ossia è l'insieme delle squadre che giocano in quel campionato.

Esempio: le regioni

Sia X l'insieme di tutti i comuni italiani. Definiamo ora una relazione binaria E sull'insieme X stabilendo che $a \mathrel{E} b$ se e solo se a e b si trovano nella stessa regione.

La relazione E è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza su X.

- Le classi di equivalenza sono le regioni italiane.
- Il quoziente X/E consiste nell'insieme di tutte le regioni italiane.

Esempio: congruenza modulo 2

Dati due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, a **è congruente a** b **modulo** 2 se $a - b$ è un numero pari (ovvero se $a - b = 2 \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$). In questo caso scriviamo

$$a \equiv b \pmod 2$$

La relazione di congruenza modulo 2 è una relazione di equivalenza:

- Riflessività: $a - a = 0$ è pari, quindi $a \equiv a \pmod 2$.
- Simmetria: $b - a = -(a - b)$, quindi $a - b$ è pari se e solo se $b - a$ lo è.
- Transitività: $a - c = (a - b) + (b - c)$, per cui se $a - b$ e $b - c$ sono pari, allora anche $a - c$ lo è.

Esempio: congruenza modulo 2

Ci sono due classi di equivalenza per questa relazione:

- i numeri pari, ossia $[0] = \{n \mid n - 0 = n \text{ è pari}\}$,
- i numeri dispari, ossia $[1] = \{n \mid n - 1 \text{ è pari}\}$,

Dunque l'insieme quoziente risultante

$$\mathbb{Z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{[0], [1]\}$$

ha esattamente 2 elementi.

Esempio: congruenza modulo n

Più in generale, dato $0 \neq n \in \mathbb{N}$ e due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, a **è congruente a** b **modulo** n se $a - b$ è un multiplo di n (ovvero se $a - b = n \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$). In questo caso scriviamo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

La relazione di congruenza modulo n è una relazione di equivalenza:

Riflessività $a - a = 0$ è sempre multiplo di n, quindi $a \equiv a \pmod{n}$.

Simmetria $b - a = -(a - b)$, quindi $a \equiv b \pmod{n}$ se e solo se $b \equiv a \pmod{n}$.

Transitività $a - c = (a - b) + (b - c)$, per cui se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ allora $a \equiv c \pmod{n}$.

Esempio: congruenza modulo n

Ciascuna classe di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza modulo n è del tipo

$$[k] = \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{la divisione intera di } a \text{ per } n \text{ ha resto } k\}$$

per qualche $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dunque l'insieme quoziente risultante

$$\mathbb{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{[k] \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

ha esattamente n elementi.

Proposizione

Sia E una relazione d'equivalenza su A e consideriamo $a, b \in A$. Se $a \; E \; b$ allora $[a]_E = [b]_E$, mentre se $a \not{E} \; b$ allora $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$. In particolare, due classi di equivalenza sono disgiunte o coincidono.

Dimostrazione.

Supponiamo $a \; E \; b$. Sia $c \in [a]_E$: allora $c \; E \; a$ e per la proprietà transitiva $c \; E \; b$, quindi $c \in [b]_E$. Essendo c arbitrario, abbiamo dimostrato che $[a]_E \subseteq [b]_E$. Sia ora $c \in [b]_E$: allora $c \; E \; b$. Per la proprietà simmetrica $b \; E \; a$, da cui $c \; E \; a$ per la proprietà transitiva: quindi $c \in [a]_E$. Segue che $[b]_E \subseteq [a]_E$. Per il principio della doppia inclusione abbiamo quindi $[a]_E = [b]_E$.

Supponiamo ora $a \not{E} \; b$. Verifichiamo che in questo caso $[a]_E \cap [b]_E = \emptyset$. Supponiamo, per assurdo, che ci sia un $c \in [a]_E \cap [b]_E$. Allora $c \; E \; b$, da cui $b \; E \; c$ per simmetria. Inoltre $c \; E \; a$, quindi $b \; E \; a$ per transitività, e $a \; E \; b$ per simmetria. Ma questo contraddice la nostra assunzione che $a \not{E} \; b$. $\square$

Partizioni

Definizione

Una **partizione** di un insieme $A \neq \emptyset$ è una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi non vuoti di A, a due a due disgiunti, che ricoprono A, cioè

1. se $X \in \mathcal{C}$ allora $\emptyset \neq X \subseteq A$,
2. se $X, Y \in \mathcal{C}$ e $X \neq Y$ allora $X \cap Y = \emptyset$,
3. ogni elemento di A appartiene a qualche $X \in \mathcal{C}$.

Ad esempio, sia $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ la collezione degli interi pari e $\mathbb{D}$ la collezione degli interi dispari. Allora

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$$

è una partizione di $\mathbb{Z}$ poiché

- $\mathbb{P} \neq \emptyset$ e $\mathbb{D} \neq \emptyset$;
- $\mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \emptyset$;
- ogni $k \in \mathbb{Z}$ è pari o dispari, quindi $\mathbb{Z} = \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$.

Definizione

Una **partizione** di un insieme $A \neq \emptyset$ è una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi non vuoti di A, a due a due disgiunti, che ricoprono A, cioè

1. se $X \in \mathcal{C}$ allora $\emptyset \neq X \subseteq A$,
2. se $X, Y \in \mathcal{C}$ e $X \neq Y$ allora $X \cap Y = \emptyset$,
3. ogni elemento di A appartiene a qualche $X \in \mathcal{C}$.

Se E è una relazione di equivalenza su A, allora il quoziente A/E è una partizione di A: ogni $[a]_E \subseteq A$ è non vuota, due classi di equivalenza distinte sono disgiunte (Proposizione precedente) e per ogni $a \in A$ si ha $a \in [a]_E \in A/E$.
Viceversa, data una partizione $\mathcal{C}$ di A, la relazione E su A definita da

$$a \; E \; b \text{ se e solo se } a \text{ e } b \text{ appartengono allo stesso } X \in \mathcal{C}$$

è una relazione di equivalenza su A, ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva (se $a, b \in X \in \mathcal{C}$ e $b, c \in Y \in \mathcal{C}$, allora $X = Y$ poiché $b \in X \cap Y$ e $\mathcal{C}$ è una partizione: perciò $a, c \in X \in \mathcal{C}$), e $A/E = \mathcal{C}$.

Quindi partizioni su A e insiemi quozienti di A (rispetto a una qualche relazione di equivalenza su A) sono la stessa cosa!

Esempio

Sia $\mathcal{C} = \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$ la partizione di $\mathbb{Z}$ in numeri pari e dispari. Consideriamo la relazione di congruenza modulo 2 su $\mathbb{Z}$, e sia $\mathbb{Z}_2$ lo spazio quoziente. Allora

$$\mathcal{C} = \mathbb{Z}_2.$$

Infatti $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ e

$$[0] = \mathbb{P} \qquad \text{e} \qquad [1] = \mathbb{D}.$$

Esercizi su relazioni d'equivalenza (1)

Consideriamo la relazione E su $\mathbb{R}$ definita da

$$x \; E \; y \text{ se e solo se } |x| = |y|.$$

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.

Siano x, y, z elementi arbitrari di $\mathbb{R}$.

- **Riflessività** Ovvio, $x \; E \; x$ perché $|x| = |x|$.
- **Simmetria** Anche questo è facile: se $x \; E \; y$ allora $|x| = |y|$, quindi anche $y \; E \; x$ perché $|y| = |x|$.
- **Transitività** Supponiamo che $x \; E \; y$ e $y \; E \; z$: vogliamo dimostrare che $x \; E \; z$. Dalla prima condizione otteniamo $|x| = |y|$, mentre dalla seconda $|y| = |z|$: quindi $|x| = |y| = |z|$, ovvero $x \; E \; z$.

Consideriamo la relazione di equivalenza E su $\mathbb{R}$ definita da

$$x \ E \ y \text{ se e solo se } |x| = |y|.$$

- Come sono fatte le classi di equivalenza di E?
  Sono del tipo $[r]_E = \{r, -r\}$ per $r \in \mathbb{R}$.
- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  Due elementi distinti se $r \neq 0$, uno solo se $r = 0$.
- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $r \geq 0$.
- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathbb{R}/E$?
  $\mathbb{R}/E = \{\{r, -r\} \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Esercizi su relazioni d'equivalenza (2)

Consideriamo la relazione E su $\mathbb{N}$ definita da

$$n \; E \; m \text{ se e solo se } n \text{ ed } m \text{ hanno lo stesso numero di cifre (in notazione decimale).}$$

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza.

Siano n, m, l elementi arbitrari di $\mathbb{N}$.

Riflessività Ovvio, $n \; E \; n$ poiché ciascun numero si scrive con lo stesso numero di cifre di se stesso.

Simmetria Ovvio, se $n \; E \; m$ vuol dire che n ha lo stesso numero di cifre di m: quindi anche $m \; E \; n$, ovvero m ha lo stesso numero di cifre di n.

Transitività Se $n \; E \; m$ e, in particolare, n e m hanno entrambi k cifre, e inoltre $m \; E \; l$, ovvero m e l hanno hanno lo stesso numero di cifre, allora anche l ha k cifre, per cui $n \; E \; l$.

Consideriamo la relazione di equivalenza E su $\mathbb{N}$ definita da

$n\ E\ m$ se e solo se n ed m hanno lo stesso numero di cifre (in notazione decimale).

- Come sono fatte le classi di equivalenza di E?
  Sono del tipo $C_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ha esattamente } k \text{ cifre}\}$ per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Più precisamente, $C_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 10^{k-1} \leq n < 10^k\}$ se $k \geq 2$.

- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  C_k ha 10 elementi se $k = 1$, e ne ha $9 \cdot 10^{k-1}$ se $k > 1$.

- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathbb{N}/E$?
  $\mathbb{N}/E = \{C_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Esercizi su relazioni d'equivalenza (3)

Sia

$$\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ è finito}\}.$$

Consideriamo la relazione $\approx$ su Fin definita da

$$X \approx Y \text{ se e solo se } X \text{ e } Y \text{ hanno lo stesso numero di elementi.}$$

Dimostrare che $\approx$ è una relazione d'equivalenza.

Siano X, Y, Z arbitrari elementi di Fin.

- **Riflessività** Ovvio, ogni X ha lo stesso numero di elementi di se stesso.
- **Simmetria** Ovvio, se $X \approx Y$ allora X e Y hanno lo stesso numero di elementi, quindi anche $Y \approx X$.
- **Transitività** Se X e Y hanno entrambi k elementi, e inoltre Y e Z hanno lo stesso numero di elementi, allora anche Z ha k elementi, da cui $X \approx Z$.

Sia $\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X$ è finito$\}$. Consideriamo la relazione di equivalenza $\approx$ su Fin definita da

$X \approx Y$ se e solo se X e Y hanno lo stesso numero di elementi.

- Come sono fatte le classi di equivalenza di $\approx$?
  Sono del tipo $I_k = \{X \in \mathrm{Fin} \mid X$ ha k elementi$\}$ per $k \in \mathbb{N}$. In particolare, $I_0 = \{\emptyset\}$, $I_1 = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $I_2 = \{\{n, m\} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$ e così via.
- Quanti elementi ha ciascuna di tali classi?
  I_0 ha un solo elemento, mentre tutte le altre classi I_k con $k \geq 1$ ne hanno infiniti.
- Quante classi di equivalenza distinte otteniamo?
  Infinite, una per ogni $k \in \mathbb{N}$.
- Com'è fatto l'insieme quoziente $\mathrm{Fin}/\approx$?
  $\mathrm{Fin}/{\approx} = \{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ordini

Definizione

Una **relazione d'ordine su** A (o, più semplicemente, un **ordine** o un **ordinamento** su A) è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva su A.

L'esempio canonico di ordinamento è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$, cioè l'insieme

$$\left\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\right\}.$$

Analogamente $\leq$ è un ordinamento sugli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Per indicare relazioni d'ordine spesso useremo, oltre a $\leq$, simboli che in qualche misura gli somigliano, come

$$\preceq \qquad \trianglelefteq \qquad \precsim \qquad \sqsubseteq \qquad \dots$$

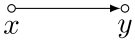
Quando vorremo esplicitare l'insieme A su cui è definito l'ordine $\preceq$ scriveremo $\langle A, \preceq\rangle$. Questa notazione è comoda per distingure, ad esempio, l'ordine sui numeri naturali $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ dall'ordine sui numeri interi $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$.

Come disegnare (alcuni tipi di) ordini

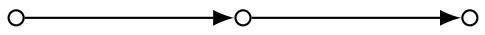
Dato un ordine $\leq$ su A diciamo che y è un **successore immediato di** x se

$$x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z(x \leq z \wedge z \leq y \rightarrow z = x \vee z = y).$$

e lo disegniamo così



L'ordine lineare con tre elementi è descritto da



o dal **diagramma di Hasse**

L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è un ordine lineare, dove

Definizione

Un ordine R su un insieme A è **lineare** o **totale** se $a \, R \, b$ o $b \, R \, a$ per ogni scelta di $a, b \in A$.

L'inclusione $\subseteq$ è un ordinamento su $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Tuttavia, se ad esempio $A = \{a, b\}$ quest'ordine non è lineare poiché $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ e $\{b\} \nsubseteq \{a\}$.

Esercizio

Disegnare il diagramma di Hasse degli ordini $\langle \mathcal{P}(\{0\}), \subseteq \rangle$, $\langle \mathcal{P}(\{0, 1\}), \subseteq \rangle$ e $\langle \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq \rangle$. In quali casi si ha un ordine lineare?

Definizione

Sia $\preceq$ un ordinamento su A. Un elemento $a \in A$ si dice

- **massimo** (rispetto a $\preceq$) se $b \preceq a$ per ogni $b \in A$;
- **minimo** (rispetto a $\preceq$) se $a \preceq b$ per ogni $b \in A$.

- L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{N}$ ha minimo (il numero 0), ma non ha massimo.
- L'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{Z}$ non ha né minimo, né massimo.
- L'ordinamento $\leq$ sull'intervallo $(0;1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ ha massimo (il numero 1) ma non ha minimo.
- L'ordinamento $\subseteq$ su $\mathcal{P}(A)$ ha minimo (l'insieme $\emptyset$) e massimo (l'insieme A), poiché $\emptyset \subseteq B \subseteq A$ per ogni $B \subseteq A$.

Esempio: la relazione di divisibilità fra numeri naturali

Definiamo $\preceq$ su $\mathbb{N}$ come

$$n \preceq m \text{ se e solo se } m = n \cdot k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\preceq$ è un ordine non totale su $\mathbb{N}$ che ha minimo e massimo.

Siano $n, m, l \in \mathbb{N}$ arbitrari.

Riflessività $n \preceq n$ poiché $n = n \cdot 1$.

Antisimmetria Supponiamo che $n \preceq m$ e $m \preceq n$. Allora esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $m = n \cdot i$ ed esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot j$. Quindi $m = m \cdot j \cdot i$, da cui, dividendo per m, si ottiene $j \cdot i = 1$. Perciò $j = i = 1$, da cui $m = n \cdot 1 = n$.

Transitività Supponiamo che $n \preceq m$ e $m \preceq l$. Siano $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $l = m \cdot i$ e $m = n \cdot j$. Allora $l = n \cdot j \cdot i$, ovvero $n \preceq l$ (basta porre $k = j \cdot i$ nella definizione).

Non totale Ad esempio, $2 \npreceq 3$ e $3 \npreceq 2$.

Minimo È il numero 1: si ha sempre $1 \preceq n$ poiché $n = 1 \cdot n$.

Massimo È il numero 0: si ha sempre $n \preceq 0$ perché $0 = n \cdot 0$.

La relazione di **divisibilità** spesso si denota con il simbolo $|$:

$$n \mid m \text{ se e solo se } n \text{ divide } m,$$

ovvero $m = n \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Dato $m \in \mathbb{N}$, l'insieme dei **divisori di** m è

$$\mathrm{Div}(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } m\}.$$

Si osservi che $\mathrm{Div}(m) \neq \emptyset$ poiché, ad esempio, 1 ed m vi appartengono. Se $m \neq 0$ l'insieme $\mathrm{Div}(m)$ è un insieme finito e contiene solo numeri compresi tra 1 ed m. Invece $\mathrm{Div}(0) = \mathbb{N}$.

Esercizio

Calcolare il diagrama di Hasse dei seguenti ordini: $\langle \mathrm{Div}(6), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(8), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(9), | \rangle$, $\langle \mathrm{Div}(12), | \rangle$ e $\langle \mathrm{Div}(30), | \rangle$. Quali di questi sono ordini lineari?

Esercizio su ordini

Definiamo $\trianglelefteq$ su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ponendo

$$n \trianglelefteq m \text{ se e solo se } m = n^k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $\trianglelefteq$ è un ordine non lineare che ha massimo ma non ha minimo.

Siano $n, m, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ arbitrari.

Riflessività $n \trianglelefteq n$ poiché $n = n^1$.

Antisimmetria Supponiamo che $n \trianglelefteq m$ e $m \trianglelefteq n$. Allora esistono $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $m = n^i$ e $n = m^j$. Quindi $m = (m^j)^i = m^{j \cdot i}$, da cui o $m = 1$ oppure $j \cdot i = 1$. Nel primo caso, $n = m^j = 1^j = 1$, da cui $m = n$. Nel secondo caso $j = i = 1$, da cui $m = n^1 = n$.

Transitività Supponiamo che $n \trianglelefteq m$ e $m \trianglelefteq l$. Siano $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $l = m^i$ e $m = n^j$. Allora $l = (n^j)^i = n^{j \cdot i}$, ovvero $n \trianglelefteq l$.

Non lineare Ad esempio, $\neg(2 \trianglelefteq 3)$ e $\neg(3 \trianglelefteq 2)$.

Minimo Non esiste, perché non esiste alcun n tale che $n \trianglelefteq 2$ e $n \trianglelefteq 3$.

Massimo È il numero 1: si ha sempre $n^0 = 1$, perciò $n \trianglelefteq 1$.

Parte stretta di un ordine

Dato un qualunque ordine $\preceq$ su un insieme A, possiamo considerare la sua **parte stretta** $\prec$ definita da

$$a \prec b \quad \text{se e solo se} \quad a \preceq b \wedge a \neq b.$$

Si verifica facilmente che $\prec$ è ancora una relazione transitiva.

> (Supponiamo $a \prec b \prec c$. Allora $a \preceq c$ per la transitività di $\preceq$. Se per assurdo $a = c$, allora si avrebbe $a \preceq b$ e $b \preceq c = a$, quindi $a = b$ per l'antisimmetria di $\preceq$, assurdo. Segue che $a \neq c$, e quindi $a \prec c$.)

Inoltre è ancora antisimmetrica, ma per ragioni banali: non ci sono coppie (a, b) tali che $a \prec b$ e $b \prec a$.

> (Se $a \prec b$ e $b \prec a$, allora $a = b$ per l'antisimmetria di $\preceq$, contraddicendo proprio $a \prec b$.)

Tuttavia, $\prec$ non è riflessiva. Anzi, per definizione non c'è *nessun* elemento $a \in A$ per cui valga $a \prec a$.

Ordini stretti

Una relazione R su A si dice **irriflessiva** se $\neg(a \; R \; a)$ *per ogni* $a \in A$.

Definizione

Un **ordine stretto** su A è una relazione irriflessiva $\prec$ su A tale che la relazione $\preceq$ su A definita

$$a \preceq b \quad \text{se e solo se} \quad a \prec b \vee a = b$$

è un ordine su A (detto **ordine indotto** da $\prec$). Equivalentemente, una relazione binaria è un ordine stretto se è la parte stretta di un ordine.

Esempio: La relazione $<$ su $\mathbb{N}$ o su $\mathbb{R}$.

Per indicare gli ordini stretti spesso si usano i simboli per gli ordini senza la parte che richiama l'uguaglianza, ad esempio

$$< \qquad \prec \qquad \lhd \qquad \sqsubset \qquad \dots$$

Scriveremo ad esempio $\langle A, \prec \rangle$ per indicare che $\prec$ è definito su A.

Esempio: discendenti e antenati

Sia A l'insieme di tutti gli esseri umani. Definiamo la relazione $\lhd$ su A ponendo

$$a \lhd b \quad \text{se e solo se} \quad a \text{ è un/una discendente di } b.$$

(Equivalentemente, $a \lhd b$ se e solo se b è un/una antenato/a di a.)

La relazione $\lhd$ è chiaramente irriflessiva, perché nessuno è discendente di se stesso. Consideriamo ora la relazione $\unlhd$ su A definita da

$$a \unlhd b \quad \text{se e solo se} \quad a \lhd b \vee a = b.$$

È una relazione chiaramente riflessiva. Inoltre, se $a \unlhd b$ e $b \unlhd a$, allora $a = b$ perché non si può mai avere che a è un discendente di b e b è un discendente di a. Infine, se a è un discendente di b e b è un discendente di c, allora anche a è un discendente di c, ovvero $\lhd$ è transitiva. Mostriamo che anche $\unlhd$ lo è. Supponiamo che $a \unlhd b \unlhd c$: se $a = b$ oppure $b = c$, allora $a \unlhd c$. Nel caso rimanente, $a \lhd b \lhd c$, quindi $a \lhd c$ e anche $a \unlhd c$.

Questo mostra che $\unlhd$ è un ordine, quindi $\lhd$ è un ordine stretto.

Pre-ordini o quasi ordini

Definizione

Un **pre-ordine** o **quasi ordine** su A è una relazione binaria $\precsim$ su A che è riflessiva e transitiva. In questo caso diremo che $\langle A, \precsim \rangle$ è un insieme pre-ordinato o quasi ordinato.

Esempio

La *classifica del campionato di serie A* è un pre-ordine $\precsim$ (lineare) sull'insieme delle squadre X: se la squadra S ha n punti e la squadra T ha m punti, diciamo che $S \precsim T$ ("S precede T nella classifica") se e solo se $n \geq m$. Si verifica allora che la relazione $\precsim$ è:

- **riflessiva:** $S \precsim S$ per ogni $S \in X$;
- **transitiva:** per ogni $S, T, U \in X$, se $S \precsim T$ e $T \precsim U$ allora $S \precsim U$;
- **ma non è antisimmetrica:** può accadere che $S \precsim T$ e $T \precsim S$ per due squadre distinte $S, T \in X$ (S e T sono a parimerito).

Dunque si tratta di un pre-ordine e non di un ordine.

Proposizione

Se $\precsim$ è un pre-ordine su A, allora

$$a \sim b \Leftrightarrow a \precsim b \wedge b \precsim a$$

è una relazione di equivalenza su A (detta **relazione di equivalenza indotta da** $\precsim$*) e la relazione su $A/{\sim}$*

$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \precsim b$$

è ben definita ed è un ordine (detto **ordine indotto da** $\precsim$*).*

Ad esempio, nella classifica del campionato di serie A (vista come pre-ordine $\precsim$), le classi di equivalenza rispetto alla relazione $\sim$ indotta da $\precsim$ sono gli insiemi di squadre a parimerito (cioè con lo stesso numero di punti). L'ordine $\leq$ indotto su tali classi di equivalenza è quella che ordina questi gruppi di squadre in base al punteggio ottenuto: l'insieme delle squadre che hanno 20 punti formano una classe di equivalenza che precede la classe di equivalenza delle squadre che hanno 19 punti, e così via.

La relazione $\sim$ definita da $a \sim b \Leftrightarrow a \precsim b \wedge b \precsim a$ è una relazione d'equivalenza.

Dimostrazione.

È evidentemente riflessiva, dato che lo è $\precsim$.

Se $a \sim b$ allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$ e quindi $b \precsim a \wedge a \precsim b$, cioè $b \sim a$; quindi $\sim$ è simmetrica.

Se $a \sim b$ e $b \sim c$, allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$ e $b \precsim c \wedge c \precsim b$, da cui per transitività di $\precsim$ si ha $a \precsim c \wedge c \precsim a$, cioè $a \sim c$. $\square$

La relazione su $A/\sim$

$$[a]_\sim \leq [b]_\sim \Leftrightarrow a \precsim b$$

è ben definita ed è un ordine.

Dimostrazione.

Supponiamo che $a \precsim b$ e $a' \sim a$ e $b' \sim b$: allora $a' \precsim a$ e $b \precsim b'$ quindi $a' \precsim b'$ per la transitività di $\precsim$. Ne segue che la definizione di $\leq$ su $A/\sim$ è ben posta, dato che non dipende dal rappresentante.

È immediato verificare che $\leq$ è riflessiva e transitiva, quindi è sufficiente verificare che è antisimmetrica. Se $[a]_\sim \leq [b]_\sim$ e $[b]_\sim \leq [a]_\sim$, allora $a \precsim b \wedge b \precsim a$, da cui $a \sim b$ per definizione, e quindi $[a]_\sim = [b]_\sim$. $\square$

Esempio di pre-ordine (1)

Consideriamo la relazione $\preceq$ su $\mathbb{N}$ definita da

$$n \preceq m \quad \text{se e solo se} \quad \begin{array}{l} m \text{ ha un numero di cifre maggiore o uguale} \\ \text{a quelle di } n \text{ (in notazione decimale).} \end{array}$$

Allora $\preceq$ è una relazione riflessiva e transitiva, ma non è antisimmetrica poiché, ad esempio, $10 \preceq 25$ e $25 \preceq 10$ (ma $10 \neq 25$). Quindi $\preceq$ è un esempio di un pre-ordine che non è un ordine.

La relazione di equivalenza associata a $\preceq$ è la relazione E ("avere lo stesso numero di cifre") della slide 20. L'ordine indotto sul quoziente $\mathbb{N}/E$ rispetto a tale relazione d'equivalenza è un ordine lineare: C_k precede $C_{k'}$ in tale ordine se e solo se $k \leq k'$, dove le C_k sono le classi di equivalenza rispetto ad E definite nella slide 21.

Esempio di pre-ordine (2)

Consideriamo la relazione $\precsim$ su $\mathrm{Fin} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X$ è finito$\}$ definita da

$X \precsim Y$ se e solo se il numero di elementi di X è minore o uguale al numero di elementi di Y.

La relazione $\precsim$ è chiaramente riflessiva e transitiva, ma non è antisimmetrica poiché, ad esempio, $\{1,2\} \precsim \{5,14\}$ e $\{5,14\} \precsim \{1,2\}$, ma chiaramente $\{1,2\} \neq \{5,14\}$. Quindi $\precsim$ è un altro esempio di un pre-ordine che non è un ordine.

La relazione di equivalenza associata a $\precsim$ è la relazione $\approx$ ("avere lo stesso numero di elementi") della slide 22. Anche in questo caso, l'ordine indotto sul quoziente $\mathrm{Fin}/{\approx}$ rispetto a tale relazione d'equivalenza è un ordine lineare: I_k precede $I_{k'}$ in tale ordine se e solo se $k \leq k'$, dove le I_k sono le classi di equivalenza rispetto a $\approx$ definite nella slide 23.

Esempio di pre-ordine (3)

Sia $\subseteq^*$ la relazione su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definita per ogni $A, B \subseteq \mathbb{N}$ da

$$A \subseteq^* B \quad \text{se e solo se} \quad A \setminus B \text{ è finito.}$$

In altre parole, $A \subseteq^* B$ se e solo se ogni $n \in A$ appartiene anche a B *tranne che per un numero finito di tali* n.

Dimostrare che $\subseteq^*$ è un pre-ordine su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Riflessività: $A \subseteq^* A$ poiché $A \setminus A = \emptyset$ è finito.

Transitività: Siano $A \subseteq^* B \subseteq^* C$. Si ha

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

Infatti, sia $n \in A \setminus C$, ovvero $n \in A$ ma $n \notin C$. Distinguiamo due casi. Se $n \notin B$, allora $n \in A \setminus B$ e quindi $n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Se invece $n \in B$, allora $n \in B \setminus C$ e quindi nuovamente $n \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Poiché $A \setminus B$ e $B \setminus C$ sono finiti, anche $A \setminus C$ lo è, ovvero $A \subseteq^* C$.

Per definizione, la relazione di equivalenza $=^*$ indotta da $\subseteq^*$ è data da

$$A =^* B \quad \text{se e solo se} \quad A \subseteq^* B \text{ e } B \subseteq^* A.$$

È facile vedere che $A =^* B$ se e solo se $A \triangle B$ è finito e che ogni classe di equivalenza rispetto alla relazione $=^*$ è infinita.

Poiché $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, si ha che $A \triangle B$ è finito se e solo se entrambi gli insiemi $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono finiti, ovvero se e solo se $A \subseteq^* B$ e $B \subseteq^* A$.

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se A è finito, allora per ogni insieme finito $B \subseteq \mathbb{N}$ si ha che $A \triangle B$ è finito poiché $A \triangle B \subseteq A \cup B$, per cui $A =^* B$. Poiché la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ finiti contiene infiniti elementi (ad esempio, contiene tutti gli $\{n\}$ per $n \in \mathbb{N}$), si ha che $[A]_{=^*}$ è infinita. Se invece $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ è infinito, allora posto $A_n = A \setminus \{a_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che gli A_n sono a due a due distinti e tali che $A_n =^* A$ (infatti $A \triangle A_n = \{a_n\}$). Quindi anche in questo caso $[A]_{=^*}$ è infinita.

Esempio di pre-ordine (4)

La relazione di conseguenza logica $\models$ sull'insieme di tutte le proposizioni è un pre-ordine.

Riflessività: Chiaramente $\mathrm{P} \models \mathrm{P}$ per ogni proposizione P, quindi $\models$ è riflessiva.

Transività: Assumiamo che $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$ e dimostriamo che $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$. Costruiamo la tavola di verità di $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ su tutte le variabili proposizionali che compaiono in P o in Q o in R. Si ha che in ogni riga in cui P è vera anche Q risulta vera (poiché $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$), e che in ogni riga in cui Q è vera anche R risulta vera (poiché $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$). Quindi in ogni riga in cui P è vera risulterà vera anche R, cioè $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$.

Tuttavia, la relazione $\models$ non è un ordine. Infatti, $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \models \neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ e $\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \models \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ ma le due proposizioni sono distinte: quindi $\models$ non è antisimmetrica. Le relazione d'equivalenza associata a $\models$ è proprio la relazione di equivalenza logica $\equiv$.