Logica Matematica
3.2 – Esercizi Relativi al Principio di Induzione

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Somma dei primi n numeri dispari

Dimostrare che:

$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione **per induzione su** $n \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, **su** $n \geq 0$).

$P(n)$ è $\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$.

Caso base ($n = 0$)

$P(0)$ è $\sum_{i=0}^{0} 2i+1 = (0+1)^2$. Verifichiamo:

$$\sum_{i=0}^{0} 2i+1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad (0+1)^2 = 1^2 = 1,$$

quindi $P(0)$ è vera.

Dimostrare che:

$\sum_{i=0}^{n} 2i+1=(n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo induttivo $(P(n) \rightarrow P(n+1))$

$P(n)$ è $\sum_{i=0}^{n} 2i+1=(n+1)^2$ (**Ipotesi induttiva**).

$P(n+1)$ è $\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1=((n+1)+1)^2$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1 &= \left(\sum_{i=0}^{n} 2i+1\right)+\Big(2(n+1)+1\Big) \\
&= (n+1)^2+2(n+1)+1 && \text{per ip. ind.} \\
&= ((n+1)+1)^2 .
\end{aligned}
$$

$\square$

Dimostrare che:

$\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo induttivo $(P(n) \to P(n+1))$

$P(n)$ è $\sum_{i=0}^{n} 2i+1 = (n+1)^2$ (**Ipotesi induttiva**).

$P(n+1)$ è $\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1 = ((n+1)+1)^2$.

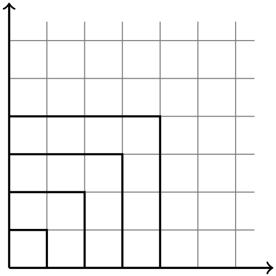
$$\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1 = \left(\sum_{i=0}^{n} 2i+1\right) + \Big(2(n+1)+1\Big) = (n+1)^2 + 2(n+1)+1$$
$$= n^2+2n+1+2n+2+1 = n^2+4n+4.$$

$$((n+1)+1)^2 = (n+2)^2 = n^2+4n+4.$$

Poiché se vale $P(n)$ allora sia $\sum_{i=0}^{n+1} 2i+1$ che $((n+1)+1)^2$ sono uguali a n^2+4n+4, si ha che anche $P(n+1)$ è vera. $\square$

Dimostrazione geometrica che $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$

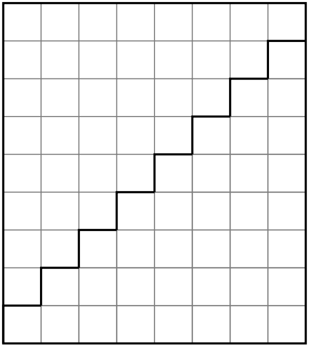
La figura



mostra come l'area del quadrato di lato $n+1$ sia ottenibile sommando l'area delle "cornici" $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$.

Dimostrazione geometrica che $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$

La figura



mostra come il rettangolo di area $n \times (n+1)$ si può ripartire in due regioni uguali, ciascuna di area $1 + 2 + \cdots + n$.

Dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per induzione su $n \geq 0$.

Caso base: $\sum_{i=0}^{0} 2i = 2 \cdot 0 = 0 = 0^2 + 0 \qquad (n = 0)$

Passo induttivo: Data $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$ dimostriamo che

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + (n+1).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\
&= n^2 + n + 2(n+1) && \text{per ipotesi induttiva} \\
&= n^2 + n + 2n + 2 \\
&= (n^2 + 2n + 1) + (n+1) \\
&= (n+1)^2 + (n+1)
\end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

Attenzione! In questo caso il passo base è quello per $n = 1$ (il passo induttivo resta invariato).

(Soluzione alla lavagna)

Ricordiamo che dato $n \geq 1$,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Dimostrare che $2^n < n!$ per ogni $n \geq 4$.

Per induzione su $n \geq 4$.

Caso base: $2^4 = 16 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! \qquad (n = 4)$

Passo induttivo: Data $2^n < n!$ dimostrare che $2^{n+1} < (n+1)!$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \\
&< n! \cdot 2 && \text{per ipotesi induttiva} \\
&< n! \cdot (n+1) && \text{(perché } n \geq 4 \text{ e } n! \geq 1\text{)} \\
&= (n+1)!
\end{aligned}$$

Definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1. \end{cases}$$

Dimostrare che $a_n = 2^{n+1} - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per induzione su $n \geq 0$.

Caso base: $a_0 = 1 = 2^{0+1} - 1 \qquad (n = 0)$

Passo induttivo: Data $a_n = 2^{n+1} - 1$ dimostrare che $a_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + 1 \\ &= 2 \cdot (2^{n+1} - 1) + 1 && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Definiamo $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per ricorsione ponendo

$$\begin{cases} g(0) = 2, \\ g(n+1) = g(n) \cdot g(n). \end{cases}$$

Dimostrare che $g(n) = 2^{(2^n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per induzione su $n \geq 0$.

Caso base: $g(0) = 2 = 2^1 = 2^{(2^0)}$ $\qquad (n = 0)$

Passo induttivo: Data $g(n) = 2^{(2^n)}$ dimostrare che $g(n+1) = 2^{(2^{n+1})}$.

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) \cdot g(n) \\ &= 2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= 2^{(2^n + 2^n)} \\ &= 2^{(2 \cdot 2^n)} \\ &= 2^{(2^{n+1})} \end{aligned}$$

Sia X un insieme infinito e $f\colon X\times X\to X$ una biezione. Definiamo una successione di funzioni $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per ricorrenza ponendo:

$$\begin{cases} h_2\colon\ X^2\to X, & (x_1,x_2)\mapsto f(x_1,x_2),\\ h_{n+1}\colon\ X^{n+1}\to X, & (x_1,\dots,x_{n+1})\mapsto f(h_n(x_1,\dots,x_n),x_{n+1}).\end{cases}$$

Dimostrare che $h_n\colon X^n\to X$ è una biezione per ogni $n\geq 2$.

Per induzione su $n\geq 2$.

Caso base $(n=2)$: si ha $h_2=f$, quindi h_2 è una biezione poiché f lo è.

Passo induttivo: **Iniettività.** se $h_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})=h_{n+1}(y_1,\dots,y_{n+1})$, allora $x_{n+1}=y_{n+1}$ e $h_n(x_1,\dots,x_n)=h_n(y_1,\dots,y_n)$ poiché f è iniettiva. Ma allora anche $(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$ perché, per ipotesi induttiva, h_n è iniettiva. Quindi $(x_1,\dots,x_{n+1})=(y_1,\dots,y_{n+1})$.

Suriettività. Dato $y\in X$, esistono $x,z\in X$ tali che $f(x,z)=y$ poiché f è suriettiva. Poiché per ipotesi induttiva h_n è suriettiva, esiste $(x_1,\dots,x_n)\in X^n$ tale che $h_n(x_1,\dots,x_n)=x$. Ponendo $x_{n+1}=z$ si ha allora $h_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})=f(h_n(x_1,\dots,x_n),x_{n+1})=f(x,z)=y$.

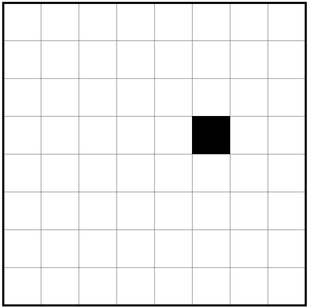
Dimostrare che ogni affrancatura da 4 centesimi o più può essere ottenuta usando solo francobolli da 2 e 5 centesimi.

(Soluzione alla lavagna)

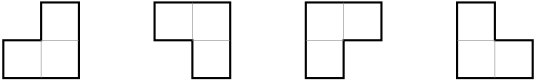
Dimostrare per induzione che se n è dispari e $a_1, \ldots, a_n$ sono dispari, allora $\sum_{i=1}^{n} a_i$ è dispari.

(Soluzione alla lavagna)

Sia F un quadrato di lato 2^n (con $n \geq 1$) da cui è stato rimosso un quadretto, per esempio

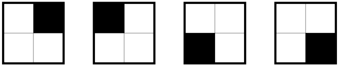


Dimostrare che F è ricopribile con i tasselli

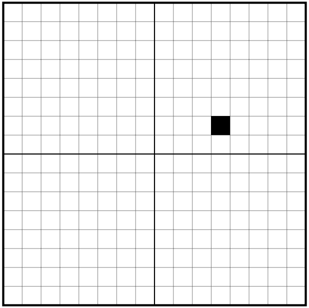


$P(n)$ è la proprietà che ogni figura F ottenuta da un quadrato di lato 2^n è ricopribile nel modo richiesto.

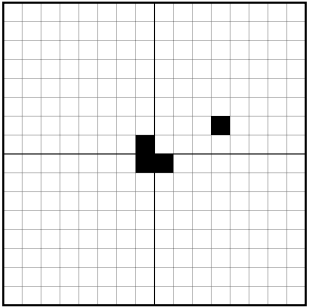
Caso base ($P(1)$): Ovvio.



Passo induttivo ($P(n) \to P(n+1)$): Sia F una figura ottenuta da un quadrato di lato 2^{n+1} e suddividiamo questa figura in quattro blocchi costituiti da quadrati di lato 2^n, uno dei quali mancante di una tessera. Per esempio possiamo supporre che il quadrato mancante sia nel blocco in alto a destra.



Mettiamo un tassello  nel punto di incontro dei quattro blocchi:



A questo punto abbiamo quattro figure a cui possiamo applicare l'ipotesi induttiva $P(n)$. Questo dimostra che anche $P(n+1)$ è vera.