

Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 18 Sett. 2013

COGNOME E NOME

Il seguente esercizio chiede sostanzialmente di calcolare la cardinalità di un'unione sotto varie ipotesi.

Esercizio 1. Vero o falso? Siano dati un insieme totalmente ordinato (I, \leq) e, per ciascun $i \in I$, degli insiemi X_i ed Y_i tali che $|X_i| = |Y_i|$. Determinare se:

1. Valga sempre l'uguaglianza $|\bigcup_{i \in I} X_i| = |\bigcup_{i \in I} Y_i|$.
2. Valga $|\bigcup_{i \in I} X_i| = |\bigcup_{i \in I} Y_i|$ sotto l'ipotesi che le funzioni $i \mapsto X_i$ e $i \mapsto Y_i$ siano iniettive.
3. Valga $|\bigcup_{i \in I} X_i| = |\bigcup_{i \in I} Y_i|$ sotto l'ipotesi che $i \mapsto X_i$ e $i \mapsto Y_i$ siano crescenti rispetto all'inclusione di insiemi, ovvero per $i < j$ in I si abbia $X_i \subset X_j$ e $Y_i \subset Y_j$ (inclusioni strette).
4. Valga $|\bigcup_{i \in I} X_i| = |\bigcup_{i \in I} Y_i|$ supponendo che la cardinalità di I sia minore o uguale a $\sup_{i \in I} |X_i|$ e che gli X_i e gli Y_i siano infiniti.
5. Valga $|\bigcup_{i \in I} X_i| = |\bigcup_{i \in I} Y_i|$ supponendo che $i \mapsto X_i$ e $i \mapsto Y_i$ siano crescenti (come sopra) e che la cofinalità di (I, \leq) coincida con la cardinalità di I .

Esercizio 2. Vero o falso?

1. $\omega \times \omega \subseteq V_\omega$.
2. Esiste un ordinale $\alpha > \omega$ tale che $\alpha \times \alpha \subseteq V_\alpha$ (dove V_α è il livello α della gerarchia di von Neumann).