

Reti Complesse



Università degli Studi di Torino

Dipartimento di Informatica

Reti Complesse - Riassunti

Anno Accademico 2018/2019

Studente:
Matteo Marsala

1 [1] Introduzione

Lo scorso decennio ha visto un crescente fascino verso la complessa connessione della società moderna. Al cuore di questo interesse c'è l'idea di rete, che può essere definita semplicemente come un insieme di elementi connessi. Spesso Facebook, YouTube ed altri siti simili, sono definiti come un social networks, ma in realtà sono più delle piattaforme social media. Rimangono comunque un buon esempio di rete, ma per social network si intende la rete reale, formata dalle relazioni tra persone. L'evoluzione ha portato a delle reti che trasmettono sempre maggiori moli di dati, i quali ci danno informazioni sulle connessioni e sulla rete stessa; ad esempio ci sono dati che si possono scaricare dai social network per analizzare la propria attività ed i propri collegamenti, oppure dati economici e finanziari sugli accordi tra diverse aziende.

Gli aspetti della rete. Nell'accezione più semplice, una rete è un insieme di oggetti nel quale alcune coppie di questi oggetti sono unite da dei links. Questa è una definizione molto flessibile e per questo permette di trovare reti in diversi domini; un esempio è quello studiato negli anni '70 da Wayne Zachary, che fece un esperimento in un club di karate, osservando le persone e collegandole tra loro secondo gli incontri e le relazioni reali. Con un grafo simile possiamo anche rappresentare i prestiti di denaro tra diverse aziende, i temi di alcuni blogs sulle opinioni politiche, oppure gli scambi di email tra diverse persone.

2 [2] Definizioni base sui grafi:

- Rete o Network: Una rete è un sistema interconnesso di oggetti (entità) in cui i nodi rappresentano le entità e gli archi rappresentano le relazioni tra tali entità (queste relazioni possono essere fisiche o logiche);
- Grafo: Struttura matematica costituita da una coppia di insiemi (V,A) , dove V è l'insieme dei nodi del grafo ed A è detto insieme degli archi ed è un sottoinsieme di tutte le possibili coppie di nodi che è possibile formare dall'insieme V ;
- Grafo Diretto o Orientato: Il grafo si dice orientato se le coppie di nodi che definiscono A sono ordinate, per cui $(a, b) \neq (b, a)$;

- Grafo non Diretto o non Orientato: Il grafo si dice non orientato se le coppie di nodi che definiscono A non sono ordinate, per cui $(a, b) = (b, a)$;
- Neighbors (Vicini o Adiacenti): Due nodi si dicono adiacenti se sono connessi da un arco. Due archi si dicono adiacenti se hanno un nodo in comune.
- Cammino: Un cammino è una sequenza di nodi (anche ripetuti) tale che per ogni coppia di nodi consecutivi nella sequenza esiste un arco che li connette;
- Cammino Semplice: Un cammino semplice è un cammino in cui non vi sono nodi ripetuti;
- Ciclo: Un ciclo è un cammino formato almeno da 3 archi e tale che il primo e l'ultimo nodo della sequenza di nodi siano lo stesso;
- Connessione e Grafo Connesso: Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi esiste un cammino (non un arco) che li lega;
- Connected Component di un Grafo: Se il grafo non è connesso allora esisteranno componenti tra loro connesse e componenti staccate tra loro. Una **componente connessa** di un grafo è un sottoinsieme di nodi del grafo tale:
 - Ogni nodi nel sottoinsieme è legato a tutti gli altri del sottoinsieme da un cammino;
 - Il sottoinsieme di nodi non appartiene ad un insieme di nodi più grande tale che tutti i suoi nodi siano connessi da un cammino.

La componente connessa è una componente internamente connessa e un pezzo indipendente dal grafo.

- Componente Gigante: La componente gigante di un grafo non connesso è la componente connessa del grafo che connette la maggior parte dei nodi del grafo. La componente gigante quando esiste è unica. Inoltre nell'analisi di una rete lo studio della componente gigante rende inutile l'analisi delle altre componenti connesse minori, che vengono trascurate;

- Lunghezza di un Cammino: Numero di archi che il cammino attraversa;
- Distanza tra due nodi: Lunghezza del cammino più breve tra i due nodi;
- Breadth First Search (Visita in ampiezza): E' una tecnica che permette di stabilire le distanze tra i nodi della rete e un dato nodo di interesse punto di partenza della ricerca. La tecnica riorganizza la struttura della rete riarrangiando ogni nodo a partire dalla distanza che ha rispetto al nodo di partenza fissato.

The Small World Phenomenon. The Small World Phenomenon (anche chiamato **The Six Degree of Separation**), è il fenomeno per cui in una rete sociale non solo un individuo è connesso a molti altri nella rete grazie ai cammini definibili passando attraverso i nodi amici dell'individuo, ma tali cammini sono anche incredibilmente corti. Il numero 6 deriva da un esperimento empirico condotto su tale fenomeno da Stanley Milgram. Il risultato dell'esperimento ha portato a concludere che **In una rete sociale, presa a caso una coppia di nodi, esiste un cammino breve che li collega.**

Un altro esperimento in tal senso è stato condotto da Leskov e Horvitz. La rete si basava sui messaggi scambiati dagli utenti di Microsoft Messenger ed era costruita in modo tale che ogni nodo fosse un utente e un arco collegava due nodi solo se questi avessero avuto uno scambio **bidirezionale** durante il periodo di osservazione considerato. Questo esperimento ha confermato il numero trovato nell'esperimento di Milgram, con una distanza media pari a 6.6 e una mediana pari a 7.

2.1 Tipi di Reti

- Comunication Network: I nodi sono dispositivi in grado di spedire messaggi e gli archi rappresentano i collegamenti diretti lungo i quali i messaggi possono essere trasferiti;
- Social Network: I nodi sono persone e gli archi rappresentano un certo tipo di interazione sociale tra i nodi;
- Information Network: I nodi rappresentano le risorse, come documenti e pagine web. Gli archi rappresentano la connessione logica tra nodi del tipo hyperlinks o citazioni;

- Transportation Network: I nodi sono le destinazioni e gli archi i collegamenti diretti;
- Dependency Network: I nodi sono dei task e gli archi orientati/diretti indicano l'ordine di esecuzione dei task;
- Structural Network: Le giunture di una struttura sono i nodi e i tiranti sono gli archi che legano le giunture;
- Collaboration Network: I nodi rappresentano gli individui e gli archi rappresentano una collaborazione.

3 [3] Strong and Weak Ties - Reti Sociali (Dinamiche):

Consideriamo le reti sociali e analizziamo la loro evoluzione nel tempo attraverso alcune misure.

Triadic Closure Principle: Se due persone in una social network hanno amici in comune, allora aumenta la probabilità che diventino amici in futuro, formando una struttura a striangolo.

Clustering Coefficient: Misura l'incidenza della Triadic Closure in una social network.

- **1.** Il clustering coefficient di un nodo A è definito come la probabilità che due nodi connessi ad A presi a caso siano tra loro connessi;
- **2.** Inoltre è definito come il rapporto tra il numero di coppie di nodi connessi ad A e connessi tra loro e il numero di tutte le possibili coppie di nodi che è possibile formare a partire dai nodi connessi ad A;
- **3.** Il Clustering coefficient è la misura del grado in cui i nodi di una rete tendono ad essere connessi tra loro. Un alto CC è molto frequente nelle social network del mondo reale, mentre un basso CC è frequente in reti create in maniera randomica.

Il range entro cui può variare il CC di un nodo va da 0 a 1: 0 quando tutte le possibili coppie di nodi adiacenti ad A sono sconnesse tra loro, 1 se sono connesse.

Ma perchè la Triadic Closure? Ci sono delle ragioni psicologiche che portano B e C ad essere amici:

- **Opportunità:** Se A spende molto del suo tempo con B e con C, allora questi ultimi hanno un'alta probabilità di conoscersi;
- **Fiducia:** per il fatto di essere entrambi amici di A, B e C si fideranno più facilmente l'uno dell'altro;
- **Incentivo:** Se A trascorre molto tempo con B e C separatamente, allora per questioni di efficienza potrebbe trascorrere del tempo con entrambi;

Osservazione: Beerman e Moody scoprirono che le ragazze con un basso CC nella loro social network sono più propense al suicidio rispetto a quelle con un alto CC. Questo dimostra che la struttura della rete diventa indicatrice di un certo tipo di eventi.

Bridge: Un arco che lega due nodi A e B in una rete e un Bridge se cancellando tale arco della rete i due nodi A e B risulterebbero risiedere in due differenti componenti del grafo. L'arco Bridge è letteralmente l'unico cammino tra i due nodi A e B nella rete.

I Bridge sono estremamente rari nel mondo reale.

Local Bridge: Il local Bridge è un concetto di Bridge meno forte. Un arco che lega due nodi A e B in una rete è un Local Bridge se cancellando tale arco della rete la distanza tra A e B aumenta di un valore strettamente maggiore di 2. Quindi A e B non sono più connessi ma esiste ancora un cammino, seppur lungo, che li collega. La distanza (maggiore di 2) che collega due nodi qualora venga cancellato il local bridge che li lega, si chiama **Span**.

Triadic Closure vs Local Bridge: Le due nozioni di Triadic Closure e Local Bridge sono concettualmente opposte l'una all'altra: un arco è un local bridge proprio quando non forma il lato di un qualsiasi triangolo della rete.

Il ruolo dei Local Bridge: Gli endpoint di un local bridge possono ricevere informazioni nuove proprio per la loro posizione partecipando a porzioni differenti del grafo, da cui hanno accesso a informazioni presenti in tali porzioni (informazioni che sarebbero altrimenti troppo lontane), per cui sono elementi fondamentali per ricostruire il flusso d'informazioni nella rete.

La Proprietà della Strong Triadic Closure:

- **1.** Se un nodo A ha un arco che lo collega al nodo B ed un arco che lo collega al nodo C, allora l'arco (B, C) è più probabile che si trasformi se (A, B) e (A, C) sono entrambi legami forti;

- **2.** Se il nodo A è connesso al nodo B e al nodo C e se B e C saranno connessi in futuro, allora gli archi (A, B) e (A, C) sono entrambi forti/strong;
- **3.:** Un nodo A viola la **Strong triadic Closure Property** se ha un legame forte con due altri nodi B e C, e nessun arco collega B a C.

Local Bridges and weak ties: Se un nodo A in una rete soddisfa la Strong Triadic Closure Property e partecipa in almeno due strong ties, allora qualsiasi local bridge che partecipa dovrà essere un weak tie. Quindi, assunto la STR property ed un numero sufficiente di strong ties, i local bridges nella rete saranno necessariamente dei weak ties. (Figura 3.5 (A, F) weak ties, pagina 52 necessario arco (E, F) se (A, F) è uno strong tie);

I Local Bridge tendono ad essere weak ties;

Dicotomia Strong (Amici) and Weak (Conoscenti) Tie:

- **Weak Ties:** Un arco che definisce un weak tie è un link che rappresenta un legame di conoscenza tra due individui, cioè un legame debole; La forza dei weak tie è che tengono la rete connessa e permettono il flusso di informazioni;
- **Strong Ties:** Un arco che definisce uno Strong tie è un link che rappresenta una forte amicizia e maggiore frequenza d'interazione;

Giant Component: Un Giant Component è una singola componente connessa che contiene la maggior parte dei nodi che costituiscono la rete (di cui la giant Componente fa parte);

Neighborhood Overlap: di un arco che connette due nodi A e B è uguale a

$$\frac{\text{numero di nodi vicini di A and B}}{\text{numero di nodi vicini di A or B}}$$

Per cui, se $N(A)$ è uguale al numero di nodi vicini ad A, allora

$$O_{AB} = \frac{|N(A) \cap N(B)|}{|N(A) \cup N(B) - A, B|}$$

O_{AB} è un proxy per valutare la presenza o meno di local bridge (che, da definizione, sono molto pochi). Bisogna ammorbidire la definizione di Local Bridge: se prima $\rightarrow [w, s]$, ora $\rightarrow [0, \text{inf}]$, gli archi diventeranno pesati in funzione del numero di minuti della conversazione che rappresentano:

$$O_{AF} = \frac{1}{6}$$

con 1 da C = (A,F) e 6 da (E,D,C,J,G,B) → (A, A, (A,F), F, F, A).

Quindi il valore Neighborhood Overlap è pari a 0 quando al numeratore si ha 0 e questo succede se l'arco considerato è un local Bridge per cui A e B non hanno nodi vicini in comune e quindi **la definizione di local bridge è contenuta nella definizione di Neighborhood Overlap.**

Tenendo conto che $O_{AB} = 0 \iff (A, B)$ è un local bridge, possiamo inoltre affermare che per gli archi il cui valore O_{xy} è molto piccolo allora possiamo ancora parlare di local bridge.

Connessioni weak tie tra le componenti del grafo: I weak tie forniscono nel grafo le connessioni più importanti per mantenere connesse tra loro le diverse componenti del grafo, che altrimenti sarebbero sconnesse, e garantiscono la formazione e il mantenimento nel tempo della Giant component tipica di una rete sociale reale. Infatti, in una rete sociale, nodi e archi definiscono la struttura eterogenea. Ci sono dei nodi **Interfaccia** che collegano due componenti del grafo e nodi al centro delle componenti legate al gruppo di nodi che definiscono la componente.

Embeddedness: L'embeddedness di un arco in una rete è il numero di vicini comuni che gli endpoints dell'arco hanno. Il suo valore è uguale al numeratore nel calcolo del neighborhood overlap ed è simile al clustering coefficient. Inoltre, i local bridge sono precisamente gli archi che hanno un Embeddedness pari a 0. gli archi in cui gli endpoints non hanno nodi in comune.

Structural Holes: Uno structural Holes si ha quando all'interno di una rete dei nodi fanno da interfaccia a più componenti che altrimenti sarebbero sconnesse.

Uno structural Hole indica l'assenza di connessioni tra due aree della rete, coperte dai local bridge. Un nodo adiacente ad uno structural hole può avere dei vantaggi dalla sua posizione: controlla il passaggio delle informazioni nella rete e conosce le cose prima degli altri.

Centrality di un nodo: La centralità di un nodo misura l'importanza e la polarità di un nodo. Vi sono diverse misure di centralità in base ai diversi aspetti della rete, ma tutte sono definite in modo da fornire un valore in [0,1]. Sia A il nodo ed n il numero totale di nodi del grafo: la **Degree Centrality** misura l'importanza del nodo in base al numero dei suoi vicini:

$$DC = \frac{\text{grado}(A)}{n - 1} = \frac{\text{numero di vicini di } A}{\text{numero totale di nodi} - 1}$$

Betweenness di un Arco: La Betweenness di un arco (A, B) è definita come il numero di cammini più brevi che passano per (A, B), considerata una qualsiasi coppia di nodi della rete. *Come si calcola la betweenness di un arco?* Si sfrutta la BFS. Si applica la BFS per ogni nodo e si valuta ogni volta il numero di cammini che esistono da A ad ogni altro nodo. Infine si sommano i valori ottenuti in ogni BFS e si ottiene la betweenness del nodo.

Graph Partitioning: Per partizionare un grafo due sono le categorie di tecniche possibili da utilizzare:

- **Tecniche divisive**: Sono tecniche che in generale per partizionare il grafo hanno un approccio top-down, cioè partono dal grafo e individuano le sottoregioni. Tra le diverse tecniche proposte quella di Girvonne Neuman suggerisce di sfruttare la betweenness degli archi e tagliare per primi gli archi con una betweenness più alta, in quanto essa permette di localizzare immediatamente quei local bridge che collegano aree altrimenti lontane o sconnesse;
- **Tecniche agglomerative**: Le tecniche agglomerative sono tecniche che in generale per partizionare il grafo hanno un approccio bottom-up, cioè partono dai nodi e uniscono i nodi al fine di trovare le sottoregioni.

In una rete sociale i links e la loro formazione dipendono da vari fattori:

- **Intrinsechi alla rete**: dipendono dalla struttura della rete: se B e C sono entrambi amici di A, è alta la probabilità che si formi un legame tra B e C in futuro;
- **Contestuali alla rete**: Dipendono da fattori esterni alla rete vuista nella sola sua struttura. Dipendono quindi dal contesto in cui gli individuo operano: l'amicizia tra due individui può formarsi se frequentano gli stessi luoghi o svolgono le stesse attività.

I fattori intrinsechi alla rete e contestuali alla rete cooperano insieme, interagiscono e favoriscono la formazione di links e di triadic closure.

4 [4] Networks in their surrounding contexts

Homophily. E' il principio per cui tendiamo ad essere simili ai nostri amici. Questo concetto e quello di triadic closure sono connessi, infatti l'omofilia diventa una delle cause che favorisce la formazione di triadic closure. *Ma come la troviamo?* L'omofilia si definisce rispetto ad una certa caratteristica che hanno gli individui della rete. Se la caratteristica può assumere due soli valori (ad esempio il 'genere': maschio o femmina), allora diremo che la formula per trovare l'omofilia nella rete rispetto a quella caratteristica dipende da $2pq$, dove p si ottiene dividendo il numero dei nodi che rispettano la prima delle due caratteristiche fratto il numero di nodi totali della rete e q si ottiene dividendo il numero di nodi che rispettano la seconda delle due caratteristiche fratto il numero di nodi totali della rete.

La rete presenta omofilia per una certa caratteristica se il numero di archi che legano due nodi che presentano un valore differente (per la stessa caratteristica) è significativamente minore di $2pq$.

L'omofilia perfetta si ha quando, per lo stesso valore della caratteristica, sono collegati tutti i nodi che lo rispettano (Ad esempio nel caso di 'genere': tutti i nodi uomini sono tra loro collegati e tutti i nodi donna sono collegati tra loro).

Heterophily: L'eterofilia è l'inverso dell'omofilia, che si ha quando il numero di archi che legano due nodi che presentano un valore differente per la stessa caratteristica è strettamente maggiore di $2pq$.

Meccanismi per la formazione di Links per produrre Omofilia.

Se l'omofilia permette di spiegare il fatto che le persone in una rete tendono ad avere links verso altre persone a loro simili, tuttavia non spiega i meccanismi dietro la formazione di questi link, ossia la **selection** e la **social influence**. Entrambi sono meccanismi che operano nella rete e nella sua evoluzione contemporaneamente.

- **Selection:** La selection è la tendenza delle persone a fare amicizia con altre persone che hanno simili caratteristiche immutabili, come la razza o l'etnia.
- **Social Influence o Socialization:** La social Influence è la tendenza delle persone a cambiare il proprio comportamento per allinearlo a quello dei propri amici, cambiano quelle **caratteristiche mutabili** come attività, interessi o comportamenti.

La selection e la social influence sono l'una l'inversa dell'altra: con la selection le caratteristiche immutabili dell'individuo guidano la formazione dei link, mentre con la social influence i link esistenti nella rete servono a condizionare le caratteristiche mutabili degli individui. I due meccanismi condizionano l'evoluzione della rete in cui o cambia il comportamento di un individuo a seguito di un cambiamento delle connessioni dell'individuo nella rete oppure cambia la rete a seguito di un cambiamento del comportamento dell'individuo. In generale, i nodi cercano da un lato i nodi simili, mentre dall'altro lato ricevono pressioni a conformarsi alla propria cerchia di nodi.

Affiliation. Si è detto che la formazione di link è legata anche a fattori contestuali esterni alla rete. Tuttavia è possibile inserirli nella rete, generando una rete in cui i nodi in parte saranno le persone e in parte rappresenteranno i fattori contestuali che condizionano la formazione di links. Un esempio di fattore contestuale sono i **Focal Points of social interaction**, ossia quelle attività in cui partecipano gli individui della rete e che aumentano la probabilità che tali individui interagiscano e quindi la probabilità che si generi un nuovo arco nella rete. La partecipazione di un individuo ad un FOSI può essere rappresentata in un'affiliation network, una rete bipartita, in cui esiste un nodo per ogni individuo e un nodo per ogni focal point e gli archi collegano gli individui alle attività cui partecipano.

Affiliation Social Network + Social Influence e Selection: Grazie ai meccanismi di Selection e Social Influence, le affiliation network e le social network cambiano nel tempo, cambiano i links che le costituiscono, in quanto se due individui partecipano ad una stessa attività allora cresce la probabilità che si crei un arco tra loro anche nella social network e se due individui sono amici tra loro è possibile che si influenzino l'un l'altro nella scelta dei fosi, quindi la affiliation network cambia. Per capire meglio l'evoluzione delle due reti è comodo sfruttare le **social-affiliation network**, reti che contengono simultaneamente la social e l'affiliation networks, i cui archi rappresentano le due relazioni, o quella di amicizia (o altra relazione sociale) tra i due individui o la partecipazione ad un certo focus di un individuo. Diversi possono essere i **Closure processes** che partecipano alla formazione di triangoli nella rete: **Triadic closure** (tra individui), **focal closure** (in relazione alla selection e prevede la formazione di un link tra 2 persone che condividono una stessa attività), **membership closure** (in relazione alla social influence: prevede un arco tra un individuo e focus cui partecipa un amico dell'individuo).

5 [5] Positive and Negative relationships

In una rete sociale i link rappresentano delle relazioni tra individui. Queste relazioni possono essere di due tipi: positive e negative. Positive nel senso di amicizia, collaborazione, scambio di informazioni. Negative nel senso di antagonismo, conflittualità. Tutte queste forze lavorano all'interno della rete e fanno in modo che i **local effects** (ossia fenomeni che interessano pochi nodi per volta) possano avere **conseguenze globali** a livello dell'intera rete. Lo **structural balance** è un framework utile per comprendere le tensioni generate da forze contrastanti, all'interno di una rete sociale.

Supponiamo di avere una rete tale che ognuno conosce tutti gli altri, quindi nessuna persona è indifferente ad un'altra. Questa rete è un grafo completo, anche detto **Clique**, dove ogni nodo è connesso con tutti gli altri. Supponiamo di etichettare ogni link con $+$ o $-$, che indicano il tipo di relazione tra i due individui connessi.

Data la rete sociale come sopra questa sarà **bilanciata** se per ogni terna di nodi, gli archi che li collegano o sono tutti e tre etichettati con $+$ o solo uno, altrimenti si dice che la rete **non è bilanciata**. Per cui, secondo tale modello, la rete è bilanciata se e solo se ogni triangolo della rete è bilanciato. Qualora la rete **non è bilanciata** vuol dire che ci sono forze in gioco che spingono in modo da bilanciare la rete. Dire che una rete sociale reale sia bilanciata è irrealistica, se pensiamo alla definizione data precedentemente. Per il *Balancetheoreme* una rete sociale è bilanciata se o tutte le coppie di nodi sono amici, o altrimenti i nodi possono essere divisi in due gruppi X e Y, tali che per ogni coppia di nodi dello stesso insieme, questi siano amici e ogni nodo di X sia nemico di un nodo in Y. La divisione in due grandi fazioni della rete è l'unico modo per la rete di essere bilanciata (ogni fazione contiene terne di nodi mutualmente amici).

Quindi assunto che il grafo fosse bilanciato e partendo dal punto di vista di un nodo, dividere i nodi nei due insiemi X e Y è possibile.

Aspetti dinamici della rete: E' interessante anche analizzare l'evoluzione di una rete nella ricerca di un bilanciamento, quindi la structural balance diventa lo strumento per comprendere tale evoluzione, che riguarda aspetti dinamici della rete. (Ad esempio lo structural balance può esplicitare bene le scelte e il comportamento assunto da diverse nazioni durante delle crisi internazionali).

A Weaker form of Structural Balance: Da quanto detto le uniche forme di sbilanciamento della rete sono i casi in cui due archi siano + oppure tutti siano -. Queste due situazioni sono tuttavia molto differenti: infatti se è difficile che due amici di una stessa persona cerchino di riconciliarsi, è molto meno difficile che due nemici si coalizzino contro un nemico comune (il nemico del mio nemico è mio amico). Diremo quindi che un grafo completo con archi etichettati con + e - è **weakly balance** se non ci sono insiemi di tre nodi i cui archi che li collegano siano etichettati con due + e un solo -. Andiamo ad escludere questo tipo di struttura sbilanciata, indebolendo la definizione iniziale di grafo bilanciato. Con questa definizione stabiliamo che ogni trinagolo che contiene almeno due + ne conterrà anche un terzo. Inoltre è possibile scomporre i nodi non più in due grandi gruppi ma in diversi gruppi tali che ogni coppia di nodi di uno stesso gruppo siano amici, e ogni coppia di nodi di due differenti gruppi siano nemici tra loro. Anche per dimostrare questo basta rispettare le condizioni stabilite nella definizione di Weakly Structural Balance. In generale si parte sempre dal punto di vista di un certo nodo A e si assume che il grafo sia completo e bilanciato. Bisogna dimostrare che:

- **1:** In X , con $A \in X$, ogni coppia di nodi è amica;
- **2:** I nodi in $X + A$ sono nemici di tutti gli altri nodi del grafo.

Structural Balance e network non complete: Consideriamo reti sociali non complete con archi etichettati con + o -. In questa rete tra coppie di nodi è possibile avere un arco etichettato con + o etichettato con - o non avere nessun arco. Definire un bilanciamento per tale rete a partire dal Balance Theorem può essere fatto da due differenti punti di vista, entrambi equivalenti e tali che se vale uno, vale anche l'altro. Tali punti di vista sono uno **Locale**, come condizione valida su ogni triangolo della rete e l'altro è **globale**, riferito al fatto di dividere l'intera rete in due set di nodi mutualmente opposti. Da un punto di vista locale il problema di definire un bilanciamento di una rete non completa vuol dire aggiungere i giusti archi per arrivare ad ottenere un grafo completo e bilanciato. Invece, dal punto di vista globale si vede lo structural balance come in grado di permettere di dividere la rete in due insiemi di amici mutualmente opposti.

Bilanciamento per le reti: trovare il bilanciamento di una rete non completa non è facile, e presume una rete bilanciata. Inoltre il processo di 'fill' degli archi può dare origine a differenti reti complete, a partire da una medesima non completa. Per dire che una rete non è bilanciata è sufficiente dire che **non contiene cicli con un numero dispari** di archi etichettati con $-$. (Il ciclo può anche contenere archi positivi oltre che un numero dispari di archi negativi e genererebbe lo stesso uno sbilanciamento). Per dire che una rete è bilanciata dobbiamo trovare la sua **Balance division**, ossia i due insiemi mutualmente negativi X e Y e tali che i nodi al loro interno siano tra loro positivi. Per trovare la balance division o eventualmente, se presente, un ciclo di archi negativi dispari è sufficiente ridurre il grafo in super nodi legati tra loro dai soli archi negativi, i supernodi sono le componenti connesse del grafo che al loro interno hanno solo archi positivi. Si passa a considerare gli archi negativi che legano i supernodi, quindi si guarda il grafo dal punto di vista dei suoi supernodi. A questo livello avremo solo supernodi e archi negativi che li connettono, poichè quelli positivi erano tutti serviti a definire i supernodi. Due sono le possibilità:

- **1:** Si trovano cicli con archi negativi dispari tra supernodi che si possono ricostruire in cicli con archi negativi dispari tra supernodi;
- **2:** Il grafo risulta bilanciato, per cui è possibile suddividere i suoi supernodi nei due insiemi X e Y .

Questo procedimento è simile a quello per trovare se il grafo è bipartito, per trovare i due insiemi X e Y cui i nodi appartengono. (Un grafo è bipartito se i suoi nodi possono essere divisi in 2 insiemi tali che ogni arco mette il nodo di un insieme con un nodo dell'altro insieme). Applicando la BFS a partire da un certo supernodo è possibile considerare per ogni layer i suoi elementi come appartenenti all'insieme X o a Y in base al livello: se pari X se dispari Y . L'outcome desiderato consiste nell'avere archi che vanno solo da un livello all'altro, quindi hanno un endpoint in X e uno in Y . Ora potremmo già dire che il grafo di partenza è bilanciato. Qual'ora invece esista un arco che connetta due supernodi dello stesso livello, allora i due cammini che legano l'ultimo nodo in comune dei due nodi connessi dall'arco sullo stesso livello a tali nodi avrebbero lunghezza k , e il cammino/ciclo che si forma avrebbe come lunghezza $2K$ (pari) più l'arco sullo stesso livello, quindi $2K + 1$, che è un numero dispari e quindi rende il grafo sbilanciato.

6 [6] Game Theory

Modelliamo a livello di comportamento. Un gioco è un payoff associato ad una strategia, con un insieme di partecipanti, e quindi ogni partecipante ha un insieme proprio di strategie.

Siano S e T due strategie, S di P_1 e T di P_2 , con P_1 e P_2 giocatori:

- **Best Response:** Associata ad una strategia dell'altro giocatore. Se è la best response per P_1 a T di P_2 se $\forall S'$ di $P_1, P_1(S, T) \geq P_1(S', T)$;
- **Strict Best response:** S è strict best response per P_1 a T se $\forall S'$ di $P_1, P_1(S, T) > P_1(S', T)$;
- **Dominant Strategy:** Associata a tutte le strategie dell'altro giocatore. S è una dominant strategy per P_1 se $\forall S', \forall T, P_1(S, T) \geq P_1(S', T)$;
- **Strictly Dominant Strategy:** Se esiste per un giocatore, questo giocatore la userà sicuramente. S è una strictly dominant strategy per P_1 se $\forall S', \forall T, P_1(S, T) > P_1(S', T)$;

Nash Equilibrium: Non c'è una strictly dominant strategy per nessun giocatore. La coppia di strategie S, T è un Nash Equilibrium se S per P_1 è best response a T di P_2 e T di P_2 è best response a S di P_1 . In questo modo nessun giocatore è incentivato a cambiare la propria strategia! Il Sistema è quindi in **uno stato di equilibrio**. Osservazione: I giocatori non possono pensare che verranno scelte strategie differenti da quelle Best response, poichè altrimenti ci sarebbe un giocatore incentivato a cambiare strategia e il sistema non sarebbe più in uno stato di equilibrio.

Multiple N.E: (ES, coordinatio game). Focal Point = Ragioni contestuali al gioco (es. preferenza), convenzioni sociali (es. guida a destra). Il Focal Point altera i N.E e la matrice di Payoff. I giocatori convergeranno sul N.E che garantisce maggiore Payoff ad entrambi. No N.E (es. attack-defense game) = **Mixed Strategies**.

Game theory: Una rete sociale è definita non solo dagli aspetti strutturali che la caratterizzano, legati all'insieme di links che legano i vari nodi, ma anche dalla interdipendenza del comportamento degli individui nella rete, in quanto il comportamento di un individuo influisce su quello degli altri. Se

l'analisi a livello strutturale della rete è al centro della Teoria dei Grafi, la modellazione delle interconnessioni in una rete a livello di comportamento degli individui è al centro della **Teoria dei Giochi**. Un gioco 1e una certa situazione in cui a fronte di due o più agenti che prendono delle decisioni, la felicità di ogni agente o giocatore dipende non solo dalla sua decisione, ma anche dalla decisione presa da tutti i giocatori. Tre sono gli aspetti che definiscono un gioco:

- **1:** Un insieme di partecipanti che chiamiamo giocatori;
- **2:** Un insieme di strategie che i due giocatori possono attuare (i comportamenti);
- **3:** Per ogni strategia scelta ogni giocatore riceve un Payoff (saldo) che dipende dalle strategie prese da ogni altro giocatore;

La **Payoff Matrix** è la matrice che raccoglie per ogni giocatore e per ogni strategia il payoff associato. Osservazione: Per i game che vedremo i giocatori sono 2, ma in generale possono essere di più. Guarderemo i One Shot game, ossia i giochi in cui i giocatori simultaneamente e indipendentemente fanno la loro mossa, e lo fanno solo una volta.

Ci interessa ragionare su come i giocatori si comporteranno, quale strategia sceglieranno. Lo strumento che agevola i giocatori nella scelta di una decisione è la matrice di payoff. Il payoff, per l'uno e per l'altro giocatore, tiene conto di tutto ciò che c'è da sapere sul gioco. Ogni giocatore conosce ogni cosa riguardo la struttura del gioco:

- **1.** Le possibili strategie che può scegliere;
- **2.** I payoff associati ad ogni sua strategia;
- **3.** Le possibili strategie dell'altro giocatore ed i payoff associati a tali strategie per il giocatore;

Osservazione: la matrice di payoff si legge partendo dal punto di vista dell'avversario e vedendo in funzione della sua scelta i payoff associati alle possibili strategie che il giocatore può attuare in risposta. Ad esempio: Il player 1 cerca e analizza la strategia migliore, in risposta alla prima strategia del player 1. Il Player due analizza/cerca la strategia migliore in risposta alla prima strategia del player 1.

Quando un giocatore ha una strategia che è decisamente migliore rispetto alle altre, indipendentemente da cosa sceglieranno gli altri giocatori, chiameremo tale strategia la **Strategia Strettamente Dominante** (strictly dominant strategy) e ci aspettiamo che il giocatore giochi proprio questa. Un Classico esempio di game theory è il 'Prisoner's Dilemma'.

Best Response and Dominant Strategy. La best response è la scelta migliore per un giocatore, dato ciò che il giocatore crede che l'avversario farà. Siano S e T due strategie e P1 e P2 due giocatori, con S la strategia di P_1 e T la strategia di P_2 . $P_1(S, T)$ indica il payoff di P_1 e $P_2(S, T)$ indica il payoff di P_2 . La strategia S è la best response a T per il giocatore P_1 se produce un payoff maggiore o uguale a quello generato da qualsiasi altra strategia di P_1 accoppiata con T.

$$P_1(S, T) \geq P_1(S', T), \forall S'$$

Quindi il payoff di S in risposta a T per il giocatore 1 è migliore o uguale rispetto ad ogni altro payoff generato da ogni altra strategia. Se questa definizione permette di considerare differenti strategie da scegliere si può enfatizzare il fatto che una è migliore delle altre dicendo che S è la **strict best response** a T per il giocatore se S produce un payoff strettamente maggiore di qualsiasi altra strategia di P1 accoppiata con T.

Quindi, rispondendo al concetto di strategia dominante, diremo che la dominant Strategy per un giocatore è la strategia che rappresenta una best response a tutte le strategie dell'altro giocatore (vedi formula sopra.) La strictly dominant Strategy per un giocatore è la strategia che è la strict best response a tutte le strategie dell'altro giocatore. Osservazioni: La best response è associata ad una strategia dell'avversario/giocatore. La Dominant strategy è associata ad ogni strategia dell'avversario/giocatore. Un esempio di best response diverse sono il caso di 'Marketing Strategy Game'.

Best Responses and no strictly dominant strategy for a player. Consideriamo il caso in cui un giocatore dei 2 che partecipano al gioco, non abbia una strictly dominant strategy, ma abbia al contrario una best response diversa in funzione della diversa strategia dell'altro giocatore; Per l'altro giocatore invece vale la strictly dominant strategy (caso marketing strategy game). In questo caso il giocatore con più best response valuta la strictly dominant strategy dell'avversario e si basa su questa per decidere

quale best response giocare. Questo perchè l'altro giocatore, avendo una sola strictly dominant strategy sceglierà proprio quella.

The Nash Equilibrium Principal. Ci possono essere games in cui nessuno dei due giocatori ha una strictly dominant strategy da usare ma solo delle best response diverse in funzione della strategia scelta dall'altro giocatore. Secondo il principio del **Nash Equilibrium**, dati due giocatori P1 e P2 e date due strategie S giocata da P1 e T giocata da P2, diremo che la coppia di strategie S, T è un Nash equilibrium se **S è una best response per T e T è una best response per S**. Questo principio non solo si basa sul fatto che i giocatori scelgano la propria strategia razionalmente, ma anche sul fatto che le due strategie rispettivamente scelte dai due giocatori garantiscono che nessun giocatore abbia un incentivo a scegliere una strategia diversa, per cui il sistema si trova in uno stato di equilibrio dove nessuna forza lo spinge ad alterare il suo stato. I giocatori non possono aspettarsi che verrà scelta una coppia di strategie che non sono tra loro best response, poichè questo vorrebbe dire che almeno un giocatore è incentivato a cambiare strategia e quindi il sistema non si trova in una situazione di equilibrio, quindi le due strategie scelte non costituiscono un Nash Equilibrium.

Multiple Equilibrium and focal point. Non sempre è facile predire razionalmente come si comporteranno i giocatori di un game e questo è dato dal fatto che non sempre esista un unico Nash equilibrium, ma è possibile che ne esista più di uno. Questo è quello che accade ad esempio nei coordination games, cioè giochi in cui i due giocatori non solo devono scegliere la giusta strategia da adottare per massimizzare il proprio payoff, ma essendoci più Nash Equilibrium (quindi essendoci più strategie S e T tali che S di P1 è best response per T di P2 e T di P2 è best response per S di P1) è necessario anche che i giocatori si coordinino nello scegliere la strategia da giocare in modo da scegliere la coppia di strategie dello stesso N.E.

Focal Point: Per risolvere questa difficoltà Thomas Nash ha introdotto il concetto del focal point: in molti games ci sono delle ragioni che portano un giocatore a focalizzarsi su un Nash Equilibrium piuttosto che su un altro. Queste ragioni, che possono o essere contestuali al gioco (es. preferenza) o essere convenzioni sociali (non considerate nei payoff), spesso diventano utili a coordinare i giocatori a scegliere lo stesso Nash Equilibrium tra i tanti che ci sono, alterando i payoff stessi della matrice dei payoff, arrivando ad un **Unbalanced Coordination Game**. Nell'unbalance coordination game ci

saranno sempre molteplici n.E, ma le alternative saranno sbilanciate, ineguali, poichè un N.E garantirà un payoff maggiore a entrambi i giocatori, rispetto a tutti gli altri N.E, per cui ci sarà proprio il N.E scelto.

Multiple Equilibrium - Anti-Coordination Game. Molteplici equilibri di Nash è possibile trovarli anche negli Anti-Coordination Game, dove per ogni strategia intrapresa da uno dei giocatori, l'altro - per restare in equilibrio - dovrà scegliere la strategia opposta. Tuttavia quello che è difficile predire è chi sceglierà l'una e chi l'altra strategia. Per raggiungere l'equilibrio è necessario che **un giocatore scelga la strategia che gli garantisce un maggiore payoff e l'altro giocatore subisca passivamente tale scelta**, avendo un payoff più basso, altrimenti qual'ora entrambi facciano la stessa scelta aggressiva il payoff di entrambi sarebbe nullo. Quello che possiamo dire è che in un Nash Equilibrium nessun giocatore avrà incentivi a cambiare la propria scelta, ma senza informazioni aggiuntive è impossibile dire quale dei due Nash equilibrium sarà attuato realmente, quindi quale giocatore subirà passivamente la scelta dell'altro.

Games with No Nash Equilibrium at all. Ci sono spesso giochi in cui non solo non esistono strictly dominant strategy per alcun giocatore, ma anche non sia possibile trovare dei Nash equilibrium. Un esempio è la classe degli **Attack-defense games**, dove un giocatore si comporta come attaccante e l'altro da difensore. Un giocatore può attaccare con una strategia tra le due che ha a disposizione, l'altro può difendere con una strategia tra le due che ha a disposizione. Se il difensore ottiene contro la strategia che l'attaccante sta usando allora il difensore ottiene il maggiore payoff, altrimenti se il difensore difende contro la strategia sbagliata, sarà l'attaccante ad ottenere il payoff maggiore.

In generale gli interessi dei giocatori in questi games sono in conflitto, infatti sono anche chiamati **zero-sum games**, ossia giochi in cui per ogni outcome (dalla matrice di payoff) la somma dei payoff dei due giocatori sarà come risultato 0. In questi giochi, di cui un esempio è il Matching Pennies, non c'è nessuna coppia di strategie che siano tra loro best responses, infatti per ogni coppia di strategie c'è un giocatore che vorrebbe cambiare strategia per aumentare il proprio payoff, a discapito dell'altro. In questo modello di giochi occorre osservare che ogni giocatore non conosce a priori la strategia dell'avversario, che fa di tutto per nascerla, altrimenti per ogni strategia scelta dall'avversario il giocatore saprebbe sempre quale intraprendere a

discapito dell'avversario, e questo vincolo porta a cambiare il modo in cui predire i comportamenti attesi: dobbiamo introdurre la probabilità (casualità) nella scelta, cioè una sorta di randomizzazione.

Mixed Strategies and No N.E. Nel caso di game in cui non esiste N.E occorre introdurre la possibilità per i giocatori di scegliere in modo random la strategia da adottare. In questo modo sarà sempre possibile trovare un **Nash Equilibrium**.

Introdurre un comportamento random significa dire che ogni giocatore non sceglie direttamente una strategia o l'altra ma sceglie una probabilità con cui scegliere una strategia o l'altra. Un dato numero p , compreso da 0 e 1, è la probabilità che un giocatore scelta una strategia e $1-p$ sarà la probabilità che scelga l'altra, tra le due disponibili per la scelta. Perciò introducendo la randomizzazione nella scelta, il gioco non consiste più sole due strategie per giocatore, ma di un set di strategie per ogni giocatore, che corrisponde all'intervallo di numeri compresi tra 0 e 1. Si parla perciò di **Mixed Strategies**. La **Pure Strategy** per un giocatore è quella per cui si sceglie una strategia tra le due con probabilità 1 e l'altra con probabilità 0.

Trovare il N.E nelle Mixed Strategies. Come possiamo definire quale outcome abbiamo tra tutte le possibili scelte random? L'idea è cercare il N.E poichè in questo modo nessun giocatore sarà incentivato a cambiare la propria strategia. Poichè le pure strategy sono le strategie di partenza (quelle senza N.E), certamente non possono far parte di un N.E, per cui in un qualsiasi N.E il valore scelto come probabilità di scegliere una strategia è strettamente compreso tra 0 e 1 (quindi con 0 e 1 esclusi). Prese le due strategie possibili di P1, H e T, considerato il payoff associato rispetto alla strategia q di P2. Se i due payoff sono diversi vuol dire che uno è maggiore dell'altro, per cui è preferibile per P1 scegliere una pure strategy piuttosto che l'altra, quindi non c'è uno stato di equilibrio. Le probabilità che fanno parte di un N.E sono quelle tali per cui i due payoff saranno uguali. Ponendo i due payoff uguali basta ricavare il valore di p per P1 e q per P2, le due probabilità che rendono possibile il N.E. Osservazione: P e Q se sommati non saranno sempre 1. trovati p e q che fanno parte del N.E la scelta di p da parte di P1 o q da parte di P2 rende l'altro giocatore indifferente. Il comportamento diventa imprevedibile per l'altro giocatore che è indifferente alle possibili scelte da prendere. Osservazione: In alcuni giochi, ad esempio

nei coordinatio game (unbalanced), è possibile non solo che esistano uno o più N.E nel caso delle pure strategies, ma che sia possibile trovare un N.E con le mixed strategies.

Pareto-Optimality e Social Optimality. In un game è possibile classificare gli outcomes non solo per il fatto di essere individualmente ottimi per uno o per l'altro giocatore, ma anche per essere 'buoni per la società. Una coppia di strategie si dice **Pareto-Optimal** se non è possibile aumentare il payoff di un giocatore senza peggiorare quello degli altri. Una coppia di strategie si dice **Social Welfare maximizer** o **Socially Optimal** se la somma dei payoff dei due giocatori è la più alta. La coppia di strategie che è socially optimal è anche pareto optimal, ma non è detto il contrario.

Reti, traffico e risposta alle congestioni: Consideriamo il modello di una rete di trasporto e vediamo come questa risponde alla congestione del traffico. Consideriamo la rete In cui da A vado in C,D e da C e D vado in B. Immaginiamo che M persone devono arrivare da A a B. X persone passano dal percorso $A \rightarrow C \rightarrow B$ e Y persone passano dal percorso che prende D. Allora $x + y = M$. Il tempo di percorrenza impiegato da un individuo per attraversare l'uno o l'altro percorso dipende dal numero di altri individui che percorrono lo stesso percorso, dal traffico e dalla congestione del percorso. Se da C a B e da A a D ci vuole un tempo di percorrenza pari a 45, ci interessa capire come si distribuiranno gli individui nei percorsi per arrivare al N.E, la situazione ideale per ogni giocatore. Il modello di traffico descritto non è altro che un traffic game, dove le persone che attraversano la rete sono i giocatori, i percorsi sono le strategie e il pay off di un giocatore è il negativo del tempo di percorrenza del percorso scelto dal giocatore. Vogliamo trovare il N.E (tempo di percorrenza), la situazione in cui nessun giocatore sia incentivato a cambiare la sua strategia, quindi cambiare percorso, poichè cambiare percorso non vuol dire ridurre il tempo di percorrenza da A a B. Il N.E in questa rete si ottiene quando i giocatori si distribuiscono equamente tra due percorsi, generando un tempo di percorrenza uguale per entrambi i percorsi. Se non si è in un N.E i tempi di percorrenza per ogni percorso saranno diversi e quindi cisarà almeno un giocatore incentivato a cambiare strategia e quindi a passare sull'altro percorso. Definito il **Social Cost** (SC) come il tempo totale speso da ogni individuo nella rete, allora per la rete vista il SC è:

- **up:** $x(x + 45)A \rightarrow C \rightarrow B$;
- **down:** $y(45 + y)A \rightarrow D \rightarrow B$.

Per cui il social cost è $SC = x(x + 45) + y(45 + y) = x^2 + 45x + 45y + y^2$.

Il costo Socialmente Ottimale è il SC più basso tra i possibili costi associati alle diverse configurazioni di scelte prese dai diversi giocatori (i traffic pattern). Nota che SC ottimale è diverso da N.E SC.

Vogliamo trovare il SC ottimale più basso e i valori di X e Y che lo rendono il più basso: utilizziamo il moltiplicatore di Lagrange (Usiamo Lagrange perchè è impossibile esprimere X in funzione di Y ma non li esprimiamo in funzione di 1): $\delta = 45x + x^2 + 45y + y^2 - 1(x + y - 40)$.

$\frac{\alpha\delta}{\alpha x} = 45 + 2x - 1 = 0 \rightarrow$ La funzione lagrangiana per i punti del vincolo corrisponde all'originaria per cui l'idea è trovare massimi e minimi per questa funzione. Per prima cosa, troviamo i punti che annullano le derivate parziali prime: $\frac{\alpha\delta}{\alpha 1} = x + y - 40 = 0$. Da questo sistema verranno fuori quelli che sono i punti stazionari (di minimo o massimo) della funzione, mettendo tutto a sistema è facile capire che X e Y sono uguali. Per cui se $M = x + y = 40 \rightarrow X = \frac{40}{2} = 20$.

$$\begin{cases} 45 + 2x - 1 = 0 \\ 45 + 2y - 1 = 0 \\ x + y - 40 = 0 \end{cases}$$

allora

$$\begin{cases} 2x = 1 - 45 \\ 2y = 1 - 45 \\ x + y = 40 \end{cases}$$

E dalle prime due equazioni vediamo che X e Y sono uguali, e dalla terza vediamo che se x e y sono uguali, allora sono uguali a 20. Modifichiamo ora la rete aggiungendo un arco da C a D con tempo 0. Ora $x + y + z = M$:

- **up:** $(x + z) + 45 : AC \rightarrow CB$;

- **down:** $45 + (y + z) : AD \rightarrow DB;$
- **zig:** $(x + z) + (y + z) : AC \rightarrow CD \rightarrow DB;$

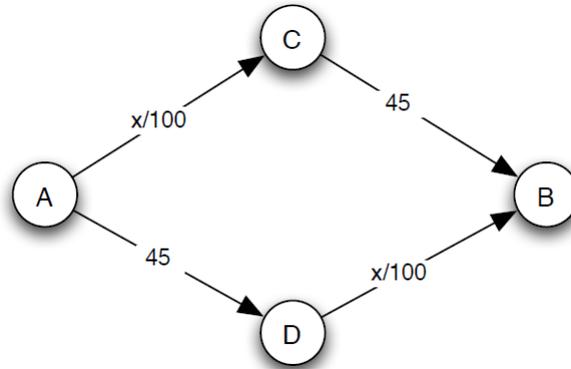
Qui il N.E è: $X_n = 0, Y_n = 0, Z_n = 40$, finchè $M \leq 45$. Se M fosse maggiore di 46, l'N.E sarebbe $46 + 46 = 92$, invece di $46 + 45 = 91$. In questa nuova rete c'è un unico equilibrio di Nash che comporta un tempo di viaggio maggiore rispetto a quello richiesto dalla rete senza l'arco C,D. In tale equilibrio ogni giocatore usa il percorso che da A a B passa per C,D: $A \rightarrow (40)C \rightarrow (0)D \rightarrow (40)B = 80$. Nessun guidatore può provare a cambiare percorso poichè richiederebbe più tempo e quindi non si arriverebbe ad un N.E. La creazione dell'arco C,D ha tramutato il percorso attraverso C,D in una **strategia dominante**. A prescindere dall'attuale flusso di traffico si guadagna passando da C,D. Il fenomeno per cui l'aggiunta di una risorsa in una rete a volte può danneggiare le prestazioni in termini di equilibrio è il fenomeno che prende il nome di **Paradosso di Braess**.

7 [8] the structure of the Web - Information Network:

Viaggiare attraverso una rete o inviare dei pacchetti attraverso essa implica una ragione basata sulla game-theory. Infatti gli individui hanno bisogno di scegliere un percorso in base alla congestione dei percorsi o semplicemente in base alle loro scelte. In questo capitolo si sviluppano modelli di rete, scoprendo risultati inaspettati come il paradosso di Braess, che dimostra che a volte l'aggiunta di capacità ad una rete può rallentare il traffico.

Traffic at Equilibrium: Inizia sviluppando una rete e analizzando come risponde al traffico sulla rete. Una transportation Network viene rappresentata da un grafo diretto, con una sorgente e una destinazione. Gli archi possono sostenere un tempo di traffico designato. Nella figura sottostante viene mostrato che se le auto di distribuissero in modo uniforme lungo i due percorsi, il tempo sarebbe minore ($4000/100+45 = 85$ VS $2000/100+45 = 65$ su ogni percorso).

Equilibrium Traffic: Quindi cosa ci aspettiamo che succeda? Il modello è un gioco dove ogni giocatore può fare la sua scelta per raggiungere B. In



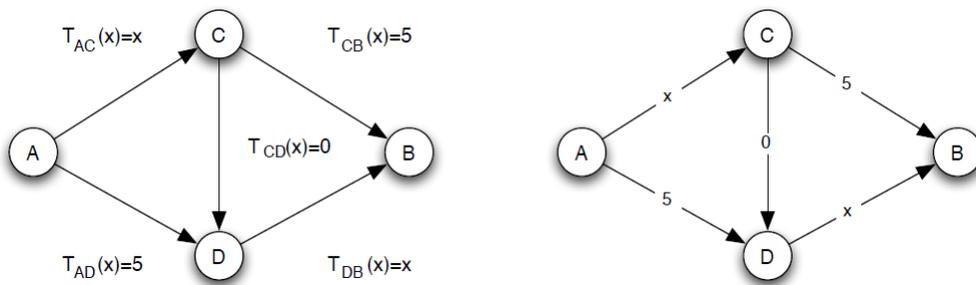
questo caso, ogni giocatore ha due strategie. Il payoff di ogni giocatore è il suo tempo di viaggio (Notare che noi ci concentriamo su due giocatori, ma solitamente in questo tipo di reti se ne hanno 4000. In ogni caso questo non genera alcun problema). Tornando al gioco, in questo tipo di game solutamente non c'è una strategia dominante, poichè entrambi i percorsi possono essere la scelta migliore. Tuttavia il gioco ha equilibri di Nash: come vedremo, qualsiasi lista di strategie dove i giocatori si equilibrano equamente tra i due percorsi (2000 ciascuno) è un equilibrio di Nash, e questo è l'unico equilibrio di Nash. L'equità produce quindi un equilibrio di Nash poichè nessun giocatore è incentivato a passare dall'altro percorso. Inoltre, tutti gli equilibri di Nash hanno un bilancio equo perchè, in percorsi con piu' giocatori, se tutti seguiranno la rotta inferiore tranne 1, i due percorsi avranno traffico diverso e quindi tutti i successivi andranno sempre nella rotta piu' veloce per fare prima. Per cui qualsiasi strategia dove x è diverso da 2000 non può essere un equilibrio di Nash.

Braess's Paradox: Fino adesso i comportamenti dei giocatori rendono la rete in equilibrio. Cambiando leggermente la rete però può cambiare tutto. Aggiungiamo un arco con tempo di viaggio pari a 0, indipendentemente dal numero di auto. Il tempo ora dovrebbe migliorare, ma stranamente il tempo peggiora per tutti i giocatori. Quando i giocatori usano il percorso a tempo 0, la formula diventa $4000/100+0=80$. Questo è un equilibrio ed è anche una strategia dominante. Infatti il percorso vuoto attira tutti i driver poichè è piu' veloce, ma poi non riesce a tornare in equilibrio. Questo dimostra che aggiungere percorsi in una rete di trasporti, a volte fa male alla rete. (In corea, si è distrutta un'autostrada a 6 corsie per mettere un parco pubblico

e questo ha migliorato il tempo di viaggio).

Il paradosso ci insegna che aggiungere una nuova strategia ad un gioco può peggiorare le cose a tutti. In realtà si chiama paradosso perchè aggiungere una strada dovrebbe migliorare le cose a tutti intuitivamente, ma abbiamo visto che non è così. Ma di quanto può essere grande il tempo di viaggio, aggiungendo una strada? Il tempo non può essere piu' grande dei $4/3$ del tempo originale. Questo è dimostrato da Roughgarden-Tardos che indica quando il paradosso di Braess è un brutto esempio se gli archi sono lineari al traffico.

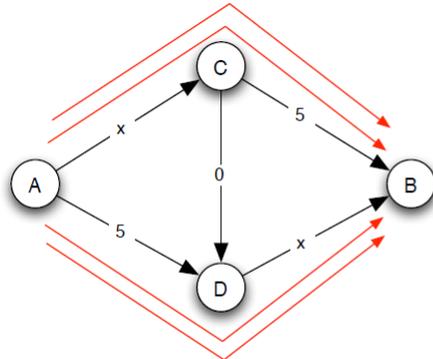
The Social Cost of Traffic at Equilibrium: Il paradosso di Braess è solo un aspetto di un piu' grande fenomeno che dimostra che questo tipo di equilibrio potrebbe non essere socialmente ottimale. In questa sezione vediamo per quanto tempo il traffico ottimale può essere in equilibrio. La rete è sempre un grafico diretto, e ogni arco ha una funzione $T_e(x)$ che fornisce il tempo necessario a tutti i conducenti per attraversare la strada quando ci sono x guidatori che la usano. Tutti i numeri sono maggiori o uguali a zero. $T_e(x) = a_e + x + b_e$.



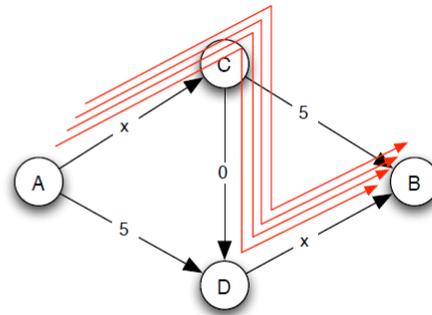
Chiameremo **traffic pattern** la scelta del percorso per ogni giocatore e il **social cost** è la somma del tempo di viaggio sostenuti da tutti i driver quando usano quel percorso. Nella figura 8.4a vediamo il costo socialmente ottimale scelto dai driver, che è 28. La 8.4b mostra l'unico Nash Equilibrium che ha un social cost piu' alto di 32. Ma in qualsiasi rete c'è un traffic pattern in equilibrio? Sì, esistono sempre.

Un'altra domanda che possiamo porci è se esista sempre un traffic pattern in equilibrio il cui costo sociale non è piu' alto dell'ottimo sociale. Scopriremo

che c'è sempre un equilibrio il cui costo sociale è al massimo doppio rispetto a quello ottimale.



(a) *The social optimum.*



(b) *The Nash equilibrium.*

Come trovare un traffic pattern in equilibrio. Dimostreremo che esiste un equilibrio analizzando la seguente procedura: si inizia da qualsiasi traffic pattern. Se è in equilibrio, abbiamo finito. Altrimenti, c'è almeno un autista la cui migliore risposta, dato ciò che tutti gli altri stanno facendo, è un percorso alternativo che fornisce un tempo di viaggio strettamente inferiore. Scegliamo uno di questi driver per passare da questo percorso alternativo. Ora abbiamo un nuovo modello, e controlliamo di nuovo se si tratta di un equilibrio, ma se non lo è, allora abbiamo qualche driver che ha un percorso migliore, e continuiamo in questo modo. Questa procedura è chiamata **best-response dynamics**, poiché dinamicamente consente di ricreare le strategie dei giocatori facendo in modo che alcuni giocatori eseguano la loro migliore risposta alla situazione attuale. Se la procedura non si ferma mai, avremo uno stato in cui ognuno gioca la sua migliore risposta e di conseguenza un equilibrio. Quindi la chiave è che le best-response dynamics devono alla fine fermarsi con un equilibrio. Ci sono dei giochi con cui questa procedura può però durare per sempre, logicamente. In realtà, tuttavia, questo non può accadere in un traffic game. Ora dimostriamo che questa procedura deve sempre terminare in un equilibrio, dimostrando così non solo che esistono gli equilibri ma anche che possono essere raggiunti da un semplice processo in cui i driver si aggiornano costantemente, secondo le loro risposte.

Analizziamo questa procedura tramite l'energia potenziale. Dimostriamo che le best-effort dynamics si fermano: vi sono giochi in cui si

ci ferma dopo 10 step e altri dove si ci ferma quando accade una particolare condizione, che, logicamente, potrebbe non accadere mai. In questi casi, una tecnica di analisi utile è quella di definire un qualche tipo di misura che tenga traccia del processo mentre opera e per mostrare che alla fine si è fatto 'abbastanza progresso' per fermarsi" fatto che il processo deve fermarsi. Il costo sociale non è così utile per questo scopo, poichè alcuni aggiornamenti della migliore risposta dei conducenti possono rendere il social cost migliore (per esempio, se un guidatore lascia una strada congestionata per una relativamente vuota), ma altri possono peggiorare la situazione (aggiungere una strada, come sopra visto). Quindi, in generale, mentre le dinamiche di migliore risposta vengono eseguite, il costo sociale del modello di traffico corrente può oscillare tra salire e scendere, e non è chiaro come questo sia collegato al nostro progredire verso un equilibrio.

Useremo l'**energia potenziale**, una misura che ha la proprietà che diminuire strettamente con l'aggiornamento di ogni migliore risposta, e quindi può essere utilizzata per tracciare l'andamento delle dinamiche best-response. L'energia potenziale di un modello di tra co è definita edge-by-edge, come segue. Se una strada al momento ha driver x su di esso, l'energia su quell'arco sarà:

$$Energia(e) = T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x)$$

Se una strada non ha driver, la sua energia potenziale è definita pari a 0. L'energia potenziale di un modello di traffic game, si calcola semplicemente con la **somma delle energie potenziali di tutti le strade**, con l'attuale numero di driver nel modello.

In ogni fase della dinamica di migliore risposta causa una diminuzione (nell'esempio 26, 24, 23, 21, 20) dell'energia potenziale. Dimostrare questo sarà sufficiente per dimostrare che la migliore risposta la dinamica deve finire, poichè con un numero finito di valori possibili, che decrescono con il progresso, la procedura deve terminare.

In particolare, l'energia potenziale della strada e con i driver x è

$$T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x - 1) + T_e(x)$$

e quando un driver lascia la strada:

$$T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x - 1)$$

Quindi il cambiamento di energia potenziale sul bordo e è $T_e(x)$, esattamente il tempo di viaggio che il driver stava avendo su e . Sommando questo su tutte le strade usate dal guidatore. Per lo stesso ragionamento, quando un guidatore adotta un nuovo percorso, l'energia potenziale su ciascun lato da cui si unisce aumenta da

$$T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x)$$

a

$$T_e(1) + T_e(2) + \dots + T_e(x) + T_e(x + 1)$$

e l'aumento di $T_e(x + 1)$ è esattamente il nuovo tempo di viaggio che l'autista sperimenta su questo bordo. Quindi, l'energia potenziale aggiunta al sistema quando un conducente segue un nuovo percorso è esattamente uguale al tempo di viaggio che il guidatore ha. Quando un guidatore cambia percorso, il cambiamento di energia potenziale è semplicemente il suo nuovo tempo di viaggio meno il suo vecchio tempo di viaggio. Ma nella dinamica delle migliori risposte, solo un guidatore cambia percorso per diminuire il tempo di viaggio, quindi **il cambiamento di energia potenziale è negativo** per qualsiasi mossa di miglior risposta. Questo stabilisce ciò che volevamo mostrare: che l'energia potenziale nel sistema diminuisce strettamente nelle Best effort dynamics.

8 [13] the structure of the Web - Information Network:

Una information Network è una rete in cui le unità connesse sono informazioni e il link legano le informazioni connesse tra loro. L'esempio di Information Network più grande è il Web, che permette di condividere e rendere accessibili facilmente i documenti in internet. I link all'interno della rete definiscono una direzione da una pagina all'altra ed è proprio per questo che il grafo che rappresenta il Web è un grafo diretto in cui gli archi direzionali sono i link che legano una pagina ad un'altra, e indicano le pagine Web. Si parla di hypertext e hyperlink, dove il concetto di hypertext indica un insieme di documenti messi in relazione tra loro per mezzo di parole chiave e le parole chiave sono gli hyperlink. Precursore del concetto di ipertesto è stato il concetto di citazione. Una Network of Citation è una rete in cui i nodi sono documenti o libri e gli archi collegano tali nodi in base a delle citazioni. Network of citation vd Web:

- Gli archi sono diretti in entrambi i casi;
- Nella network of citation i passaggi temporali sono molti più evidenti perchè ogni test cita gli autori di testi scritti precedentemente e da cui hanno attinto, per cui ogni arco punta ad un nodo (documento o libro) temporalmente precedente;
- Se nella network of citation una volta pubblicati i documenti restano quelli, nel web è possibile trovare pagine che dopo la loro pubblicazione non vengano più modificate, e pagine che vengono aggiornate costantemente.

Interessante è osservare come in tali reti esistano cammini brevi che legano concetti apparentemente distante tra loro, proprio come accade nelle social networks col fenomeno del six degrees of separation, dove i cammini brevi collegano coppie di persone apparentemente distanti tra loro nella rete. Osservazione: La natura diretta dei link e quindi del grafo è quella che distingue una information network da una social network, in cui gli archi non sono orientati.

Tipologie di Link: Quando si parla di link nel web, una distinzione che si può fare è quella tra **navigational** and **transactional** links: I navigational link sono i classici collegamenti ipertestuali che permettono di passare da una

pagina all'altra della rete, i transactional link sono i link che permettono di portare a termine delle transazioni, delle operazioni, che quindi non hanno il compito di portare l'utente verso una nuova pagina, ma piuttosto di eseguire un'operazione, ad esempio il classico 'Buy Now' in un sito di ecommerce. I Navigational links sono i links che formano il 'backbone', 'la spina dorsale' del Web, e sono i links cui si farà riferimento nel seguito.

Il Web come grafo diretto. Vedere il Web come un grafo permette di:

- Comprendere meglio le relazioni logiche espresse dai suoi links;
- Comprendere e scomporre la sua struttura in unità più piccole e coese;
- Identificare le pagine più importanti al fine di migliorare l'organizzazione dei risultati a fronte di una ricerca;

E' importante a questo punto osservare che i links su cui ci concentreremo sono i navigational links, che sono la maggior parte dei link nel web e ne costituiscono la spina dorsale. Inoltre, la natura diretta dei links nel web non collega coppie di nodi in maniera simmetrica, ma collegano un nodo a un altro.

La **connettività** di un grafo non orientato è definita in termini dei cammini nel grafo: due nodi sono collegati da un cammino se è possibile seguire una sequenza di archi che parte dal primo nodo e arriva al secondo nodo, per cui il grafo è connesso se tutte le coppie di nodi sono collegate da un cammino. E, se il grafo non è connesso, tuttavia potrebbe essere possibile scomporre il grafo nelle sue componenti connesse.

Per un grafo orientato come il Web occorre ridefinire la definizione di cammino. Un cammino da un nodo A ad un nodo B in un grafo diretto è una sequenza di nodi, che comincia da A e arriva in B, con la proprietà che ogni coppia consecutiva di nodi nella sequenza è connessa da un arco che parte dal primo nodo e punta al secondo. A partire da questa nuova definizione di cammino è possibile definire la connettività per un grafo orientato. Un grafo orientato è fortemente connesso (strongly connected) se esiste un cammino da ogni nodo a ogni nodo del grafo. Quando un grafo orientato non è strongly connected, è importante descrivere la sua reachability (raggiungibilità): identificando quali nodi sono raggiungibili da quali altri,

usando i cammini esistenti nel grafo. In un grafo diretto è possibile avere coppie di nodi tali che ognuno possa raggiungere l'altro, coppie di nodi tali che uno solo possa raggiungere l'altro e non viceversa, e infine coppie di nodi tali che nessuno dei due possa raggiungere l'altro. Una **strongly connected component** (SCC) in un grafo diretto è un sottoinsieme di nodi tali che:

- Ogni nodo nel sottoinsieme ha un cammino verso un altro nodo;
- Il sottoinsieme non è parte di un insieme più grande con la proprietà per cui ogni nodo può raggiungere un altro.

The Bow-Tie Structure Of the Web. Andrei Broder ha costruito una mappa globale del web usando le Strongly Connected Components come blocchi base della mappa. Tale mappa definisce la Bow-Tie Structure of The Web. Il paradigma usato per rappresentare il Web generando la sua mappa, prevede tre blocchi fondamentali:

- **IN:** sono le pagine che non hanno link in ingresso dall'SCC e che puntano verso l'SCC;
- **OUT:** sono le pagine che non hanno link in uscita verso l'SCC e che sono raggiungibili dall'SCC;
- **SCC:** sono le pagine che hanno sia link in ingresso provenienti dalle pagine nell'insieme degli In e sia link in uscita verso le pagine nell'insieme degli OUT. E' inoltre la componente più grande;
- **Tendrils (Tentacoli):** sono quelle pagine che o non sono raggiungibili dalle pagine nell'insieme degli In ma hanno nodi in uscita che non raggiungono l'SCC, o quelle pagine che puntano verso pagine appartenenti all'insieme degli OUT, ma non sono raggiungibili dalla SCC;
- **Disconnected:** sono quelle pagine tali che anche qual'ora si ignorasse la direzione degli archi non si avrebbe un cammino che li lega alla SCC;

Gli ultimi due blocchi sono una suddivisione ulteriore.

La bow-tie structure of the Web da una visione ad alto livello della struttura del Web, con la quale è possibile notare come il Web contenga un core centrale che contiene la maggior parte delle pagine più importanti.

Occorre osservare inoltre che tale struttura è molto dinamica e soprattutto che i confini di questa mappa sono molto variabili per il fatto che vengono create sempre nuove pagine e queste possono o meno essere collegate ad altre e rientrare nelle tipologie di pagine che costituiscono la struttura stessa.

9 [14] Link analysis and Web Search - Searching The Web: The problem of Ranking

Dato in input un set di Keyword relativo ad un topic di ricerca, i motori di ricerca restituiscono un set di pagine che sono associate a tale topic nel web e operano il ranking dei risultati trovati. Questo viene fatto usando dei metodi automatici che guardano direttamente al Web, alla sua struttura e alle informazioni intrinseche nel web, senza utilizzare risorse esterne. Quindi si pongono due problemi: La ricerca dei Documenti in una collezione vasta di documenti, e il ranking dei risultati. Questi problemi sono stati già affrontati prima della nascita del Web dai sistemi di **information retrieval**. Nei sistemi IR i problemi relativi alle Keyword based search riguardavano il fatto che le liste di parole chiave sono in un certo modo inespressive, e soffrono di problemi quali **sinonimia** (più termini che indicano lo stesso concetto) e **polisemia** (più significati per uno stesso termine). I motori di ricerca nel web, oltre a questi problemi, devono far fronte a nuove problematiche tipiche del Web:

- **Diversity**: nel Web ognuno è autore e ognuno ricerca, per cui le pagine web sono prodotte da autori diversi con diverse conoscenze, per cui dato un certo topic possono esistere più pagine scritte da autori diversi con prospettive diverse, quindi diventa più difficile stabilire un criterio di ranking unico in base al quale restituire tali documenti. Inoltre la diversità nel set di persone che pongono le query e il problema dei molti significati associabili diventano rilevanti nel rank dei risultati, per cui lo stesso ranking dei risultati non può essere considerato valido per tutti;
- **Constantly-Changing Content**: Nel Web alcuni contenuti sono dinamici e possono cambiare costantemente, per cui informazioni più recenti devono essere restituite per prime nel ranking dei risultati. (Esempio: 'news search featurer' dei motori di ricerca per restituire subito documenti relativi a vicende);
- **Searcity vs Abundance**: Se nei sistemi IR c'era il problema della scarsità di documenti relativi ad un certo topic specifico tra la mole di documenti, nel Web è nato il problema opposto: dato un certo topic i motori di ricerca non hanno problemi a trovare milioni di documenti relativi a quel topic, ma diventa importante filtrare quelli veramente rilevanti per chi ha effettuato la ricerca.

Diventa essenziale capire come organizzare il rank, in base alle caratteristiche intrinseche del Web. Dato un certo set di documenti rilevanti per una query, estratti dalla collezione iniziale grazie a tecniche classiche di **Text Retrieval**, è possibile sfruttare la **Struttura** del Web, dominata dai **Links** per migliorare il ranking dei risultati. **I link diventano essenziali per il ranking delle pagine:** è possibile usare i link per valutare l'autorità di una pagina rispetto ad un certo topic, tramite l'implicita approvazione che le altre pagine sul topic danno a tale pagina attraverso il fatto di avere un link verso quest'ultima; Se una pagina ha molti link in ingresso da pagine rilevanti per il topic, allora riceve una sorta di **approvazione collettiva implicita** da tali pagine. **Sfruttiamo le informazioni nei documenti e tra i documenti.** Gli In-links diventano una misura dell'autorità di una pagina su un certo topic, dell'autorità o centralità della pagina sul topic. Non è la misura dell'importanza della pagina nel Web ma dell'importanza della pagina rispetto all'argomento cercato.

Hub and Authorities. In risposta ad una query (testuali, composta da un certo numero di Keyword), dalla lista di pagine rispondenti alla query, vengono generate due liste di pagine:

- **Authorities** (link in entrata): pagine che contengono informazioni utili e che sono linkate da molti hubs;
- **Hubs** (link in uscita): pagine che puntano ad altre pagine, pagine che contengono una valida lista di link a pagine relative all'argomento cercato e pagine che contengono links verso authorities;

In generale buoni hubs puntano a molte buone authorities e buone authorities sono puntate da hubs molto buoni.

Osservazione: della stessa pagina si definisce l'hub score e l'authorities score.

L'intuizione dietro i concetti di hubs e authorities sta nel fatto che le pagine possono giocare molteplici ruoli in una rete e in generale possono giocare un grande ruolo nell'**approvazione implicita delle pagine, senza essere se stesse approvate fortemente dalla rete.**

Calcolare l'hub score e l'authority score: L'hub score e l'authority score per una pagina (tra il set di pagine rilevanti per la query) si calcola con il seguente algoritmo:

- **1.** Si parte assegnando ad ogni nodo uno score di hub e uno score di authority pari ad 1;
- **2.** Si sceglie un numero K di steps per cui ripetere il 2.1 e il 2.2. Con 2.1 si applica l'**authority update rule**, con il 2.2 si applica l'**hub update rule**;
- **3.** Si normalizzano gli score di authority e hub dividendo ogni authority score con la somma di tutti gli authority score e ogni hub score con la somma di tutti gli hub score;

L'Authority Update Rule e L'Hub Update Rule partono dall'idea che le pagine linkate sono tanto più buone quante più pagine le linkano e quanto più sono buone tali pagine che le linkano. L'**Authority Update Rule** aggiorna l'authority score di ogni nodo p come la somma degli hub scores dei nodi che puntano al nodo p:

$$\forall p, \text{auth}(P) = \sum_{i=1}^n \text{hub}(i)$$

con arco (i, p). Nell'authority update rule votiamo.

L'Hub Update Rule aggiorna l'hub score di ogni nodo p come la somma degli authority scores di tutti i nodi che il nodo p punta.

Nell'hub update rule usiamo la qualità degli authorities per rifinire i migliori hubs. Step:

- **1.** $\text{hub}(p) = \text{auth}(p) = 1 \forall p$;
- **2.** for k steps: si applica l'authority update rule e poi si applica l'hub update rule;
- **3.** Normalizzo i risultati ottenuti dividendo ogni authority per la somma di tutti gli authorities e ogni hub per la somma di tutti gli hubs.

$$\forall p, \text{auth}(P) = \frac{\text{auth}(p)}{\sum_{p=1}^n \text{auth}(p)} \text{ e } \text{hub}(P) = \frac{\text{hub}(p)}{\sum_{p=1}^n \text{hub}(p)}$$

maggiore è il valore K maggiore è il numero di steps, quindi con K che tende ad infinito il valore ottenuto con la normalizzazione converge, tende

a stabilizzarsi, indipendentemente dal valore K scelto. Indipendentemente dal valore iniziale scelto per gli hubs e gli authorities, purchè positivo, anche se è diverso da 1, rimane comunque valida la convergenza: questo vuol dire che il limite per i valori di hubs e authorities è una proprietà puramente della struttura. Ad un certo punto si raggiunge una forma di equilibrio. Osservazione: Ci possono essere eccezioni dovute ad un certo tipo di struttura con proprietà degenerate.

L'intuizione dietro i concetti di hubs e authorities sta nel fatto che le pagine possono giocare molteplici ruoli in una rete, e in particolare possono giocare un grande ruolo nell'approvazione implicita delle pagine senza essere se stesse approvate fortemente dalle altre.

Page Rank: L'endorsement (sostegno) per il page rank è la misura dell'importanza delle pagine generate come per hub e authority a partire dalla struttura a link del web. Una pagina è tanto più importante quanto più è citata da pagine importanti: l'endorsement passa da una pagina importante ad un'altra in maniera diretta (e non implicita come nell'hub-authority). **L'endorsement è ricevuto dagli in-links dei nodi e passa attraverso la rete tramite i link in uscita.** Possiamo pensare al Page Rank come ad un tipo di fluido che scorre nella rete attraversando nodi e archi e alla fine si concentra sui nodi più importanti.

Trovare il page Rank di una pagina vuol dire:

- **1.** In una rete con N nodi, si assegna ad ogni nodo il medesimo Page rank: $PR = \frac{1}{N}, \forall n \in N$, con $N =$ numero di pagine Web;
- **2.** For K steps si applica con la **Basic Page Rank Update Rule:** ogni pagina divide il suo Page rank corrente equamente verso tutti i suoi archi uscenti (se una pagina non ha nodi uscenti il suo Page rank la passa a se stessa). Ogni pagina aggiorna il suo Page Rank come la somma dei valori di Page Rank ricevuti $PR(p) = \sum_{i=1}^n \frac{PR(i)}{out(i)}$, dove n rappresenta il numero di pagine connesse a p (cioè tra le N pagine note, pagine che contengono almeno un link verso p). (i,p) è invece l'arco. $Out(i)$ rappresenta il numero di archi uscenti dalla pagina i .

Osservazione: Il valore totale di Page Rank nella rete ad ogni step K rimane costante, il Page Rank non viene ne creato ne distrutto, ma trasferito da un nodo all'altro nei vari step. Anche il Page Rank come l'Hub-Authority

converge verso un certo valore limite al crescere di K (il numero di steps) con K che tende a infinito.

Page Rank vs Authority: L'hub-authority e Page Rank sono entrambe tecniche iterative basate sulla struttura a link del Web. Tuttavia esistono specifiche distinzioni:

- **Hub-Authority:** Hub e authority score sono specifiche di una certa query, infatti sono calcolati al momento della query. Produce quindi 2 score per documento. Inoltre si applica ad un set ristretto di pagine rilevanti (con approvazione implicita delle pagine);
- **PageRank:** E' indipendente dalle query, infatti è calcolato nel momento in cui il motore di ricerca esegue l'indexing delle pagine. Produce un solo score per documento. Si applica su tutti i documenti. L'approvazione esplicita.

Problemi per il Page Rank. Lo Slow Leak: Un problema nella definizione di Page Rank tale che

$$PR(p) = \sum_{i=1}^n \frac{PR(i)}{out(i)}$$

sta nel fatto che da una struttura particolare di rete è possibile che il page rank totale vada a concentrarsi solo su certe pagine. In Una tale rete il Page Rank andrà a fluire tutto sui nodi più bassi e lontani, dopo un certo numero di Steps, poichè non torna mai indietro nel resto della rete. Questo effetto viene chiamato **Slow Leak**.

Tale problema viene risolto usando un procetto di **esaporazione** del fluido, che nella formula su converge nello **scaling factor**, un numero compreso strettamente tra 0 e 1, di solito 0.8 o 0.9, che permette di far confluire nuovamente nel resto della rete il page rank totale.

Osservazione: Nella low-tie structure del Web avremo che il page rank andrebbe tutto a confluire nei nodi in OUT senza l'uso dello sealing factor.

$$PR(p) = S \left(\sum_{i=1}^n \frac{PR(i)}{out(i)} \right) + (1 - S) * \frac{1}{N}$$

L'(1-S)*1/N non fa altro che redistribuire a ogni nodo della rete una porzione uguale di page rank indipendentemente dal numero di link della

pagina p.

Page rank e Random Walk. Si può dare una definizione di Page Rank in termini di **random walk e random walker**. Per Random walk si intende una navigazione utente tale che in un primo momento ogni pagine ha la stessa probabilità di essere scelta; Successivamente l'utente seguirà K steps in cui sceglierà in maniera random (quindi equiprobabile) uno dei link in uscita dalla pagina in cui si trova.

La probabilità di arrivare ad una pagina i è pari alla probabilità di essere finiti nel passo precedente in una pagina J che punta ad i (tra tutte quelle che puntano ad i), divisa per tutti i nodi puntati da J (quindi divisa per il numero di archi uscenti da J). Se b_J è la probabilità di essere in una qualsiasi pagina J tra quelle che puntano ad i ed b_J indica il numero di archi uscenti di tale pagina, allora la somma delle probabilità relativa a tutti i nodi J che puntano ad i indica la probabilità di arrivare al nodo i nello step successivo del walker. Quindi la **probabilità di essere alla pagina X dopo K steps** del random wal è il valore di **page rank di X dopo J applicazioni del page rank update rule**. Se il b_J indica la probabilità del random walker di essere nel nodo J in un certo step, la probabilità nello step successivo di essere nodo i e $b_i = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{l_j} = \sum_{j=1}^n b_j M_{i,j}$, dove:

- l_j indica il numero di archi uscendi dal nodo j;
- b_j è la probabilità/page rank del nodo j che verrà equamente redistribuito ai nodi figli;
- M è la matrice t.c: 0 se non esistono archi tra i e j, $1/l_i$ se esiste l'arco i,j.

In tale ottica lo **scaling factor**, volendolo associare ad un'attività dell'utente, corrisponde a:

- S si riferisce al fatto che il cammino segua un link a partire dalla pagina in cui si trova;
- 1-S: si riferisce al fatto che il cammino salti verso un nodo scelto a caso non puntato dalla pagina in cui il cammino si trova;

e quindi la probabilità di arrivare nello step successivo al nodo i partendo da un nodo J che punta ad i è pari a:

$$\sum_{j=1}^n S\left(\frac{b_j}{l_j}\right) + (1 - S)\frac{1}{n}$$

Spectral Analysis of Hubs and Authorities. La spectral analysis dei grafi indica lo studio della struttura della rete attraverso l'uso di autovalori e autovettori. Data la matrice di adiacenza di un grafo M , tale che, per ogni $M_{i,j}$, sarà 1 se i,j è un arco o link, 0 altrimenti.

Osservazione: Poiché la rete è una rete diretta, **la matrice di adiacenza non è simmetrica**. Consideriamo due vettori a ed h , dove $\forall a_i \in a$, e $\forall h_i \in h$, l'iesimo elemento corrisponde rispettivamente all'autority o al grado di hub dell'iesimo nodo del grafo. Dato i il nodo che stiamo considerando e j i nodi cui i è collegato, allora l'hub score di i è uguale alla somma di tutti i valori a_j , i **j-elementi** per cui $M_{ij} = 1$:

$$h_i = \text{hub}(i) = \sum_j M_{ij} a_j$$

per cui $\text{hub}(i) = M_{i1}a_1 + M_{i2}a_2 + \dots + M_{in}a_n$, (la riga è la stessa, mi muovo lungo la colonna) quindi $h = Ma$, ossia l'**Hub Update Rule** corrisponde al prodotto tra la matrice di adiacenza e il vettore a . Dato il nodo che stiamo considerando i , i nodi che hanno un arco entrante in i , allora l'autority score di i è pari alla somma degli hub score di tutte le pagine j che puntano a i , per cui:

$$a_i = M_{1i}h_1 + M_{2i}h_2 + \dots + M_{ni}h_n$$

per cui $a = M^T h$, quindi l'**Authority Update Rule** corrisponde al prodotto della trasposta della matrice M per il vettore degli score di Hubness.

Dati a^0 e h^0 , vettori iniziali di authority e hubness, e dati a^k e h^k i vettori di authority e hubness score dopo K applicazioni dell'autority e dell'hub update rule, avremo, allo step K : $a^k = (M^T M)^{k-1} M^T h^0$ e $h^k = (M M^T)^k h^0$. Quindi se ne deduce che a e h , dopo K steps, sono il risultato della moltiplicazione del vettore iniziale h^0 per la potenza di rispettivamente $M^T M$ e $M M^T$.

Per dimostrare il fatto che con il tendere di K ad infinito i vettori h^k e a^k convergono ad un vettore per una costante c e d , quindi $\frac{h^k}{c^k}$ e $\frac{a^k}{d^k}$ convergono su un certo vettore, al crescere di K che tende ad infinito, e se

convergono su un certo vettore vuol dire che convergono sulla direzione del vettore. Quindi $(MM^T)h^x$ può cambiare in modulo di un fattore c e non può cambiare per direzione. Se è così, h^x è l'eigenvector di MM^T e c è il corrispondente autovalore per cui $(MM^T)h^x = ch^x$, cioè matrice per eigenve-
 cotr = eigenvalue per eigenvector. Dunque la sequenza di vettori $\frac{h^k}{c^k}$ converge su un autovettore della matrice MM^T . Possiamo dimostrare ciò partendo dal fatto che MM^T è una matrice quadrata e simmetrica. Se la matrice A è quadrata e simmetrica ciò vuol dire che $A = A^T$ e che ha n eigen-
 vector ortogonali tra loro che quindi fanno da base ad uno spazio R^n . Se indichiamo con Z_1, Z_2, \dots, Z_n gli eigenvector e con c_1, c_2, \dots, c_n gli autovalori con $|c_1| > |c_2| > \dots > |c_n|$, se x è la combinazione lineare dei vettori z_1, \dots, z_n , $x = p_1z_1 + p_2z_2 + \dots + p_nz_n$ con $p_1 \dots p_n$ costanti, allora $(MM^T)x = (MM^T)(p_1z_1 + p_2z_2 + \dots + p_nz_n) = p_1z_1MM^T + p_2z_2MM^T + \dots + p_nz_nMM^T$. A questo punto essendo che ogni z_i era un autovettore di MM^T , possiamo scrivere: $(MM^T)x = p_1c_1z_1 + p_2c_2z_2 + \dots + p_nc_nz_n$. Ora, partendo da questo possiamo riscrivere h^k se $h^k = (MM^T)^k h^0$, considerata h^0 come combinazione lineare dei z_1, \dots, z_n vettori:

$$h^k = (MM^T)^k h^0 = c_1^k q_1 z_1 + \dots + c_n^k q_n z_n$$

ricordando che h^0 inizialmente è un vettore di tutti 1 e che può essere rappresentato come combinazione lineare di vettori $h^0 = q_1z_1 + \dots + q_nz_n$.

Riprendendo la precedente riformulazione di h^k e dividendo entrambe le parti per c_1^k , abbiamo che:

$$\frac{h^k}{c_1^k} = \frac{c_1^k q_1 z_1 + \dots + c_n^k q_n z_n}{c_1^k}$$

e tenendo presente che $c_1^k > c_2^k$, abbiamo che $\frac{c_1^k q_1 z_1}{c_1^k} + \dots + \frac{c_n^k q_n z_n}{c_1^k}$, con tutti i membri che tendono a 0. Quindi $\frac{h^k}{c_1^k}$ converge a q_1z_1 e z_1 nello specifico è il vettore cui h^x converge, che era proprio l'autovettore.

Spectral Analysis del PageRank. Il flusso di page rank specificato dall'update rule può essere rappresentato sfruttando una matrice N , dove:

- $N_{ij} = 0$ se i non è collegato a j ;
- $N_{ij} = \frac{1}{l_i}$ se i è collegato a j ed l_i indica il numero di archi in uscita dal nodo i ;

Osservazione: Se un nodo non ha archi uscenti passa il suo page rank a se stesso, per cui $N_{ii} = 1$.

Se \mathbf{r} è il vettore di page rank dei nodi, allora per un nodo i , $r_i = N_{1i}r_1 + N_{ni}r_n$ e quindi $r = N^T r$. Quando consideriamo anche lo **sealing factor** per il calcolo del page rank, allora useremo la matrice $\tilde{N}_{ij} = sN_{ij} + (1-s)/n$ e r_i e r uguale a sopra sostituendo N con \tilde{N} .

Applicando per K step consecutivi l'update rule del page rank otterremo che $r^k = (\tilde{N}^T)^k r^0$.

Osservazione: Il page rank non occorre normalizzarlo perchè rimane costante la somma totale dei page rank di tutti i nodi, quello che cambia è il page rank associato ad ogni nodo in ogni step. Ci aspettiamo che dopo K steps con K che tende ad infinito, il vettore r converge su r^x , e questo vuol dire che converge sulla direzione r^x . r^x è quindi autovettore di \tilde{N}^T e 1 è il corrispondente autovalore:

$$r^x \cdot \tilde{N}^T = 1 \cdot r^x$$

In questo caso però \tilde{N}^T non è simmetrica per cui per dimostrare che il limite di r^k che tende a infinito converge, possiamo sfruttare il teorema di Perron, che giustifica la convergenza del prodotto tra una matrice ed un vettore su un certo vettore y se:

- La matrice ha solo valori positivi;
- Il vettore di partenza ha valori positivi e diversi da 0;
- L'eigenvalue è uguale a 1.

Il vettore cui convergono i prodotti è unico ed è proprio quello che cercavamo.

10 [16] Information Cascade

Quando le persone sono connesse da una rete si influenzano l'una con l'altra nelle scelte e nei comportamenti. (ricordarsi dell'esercizio con 3 linee, dove tutti dovevano dire quale linea era uguale a quella che appariva per ultima). Ci sono innumerevoli situazioni in cui ciò accade: l'acquisto di prodotti, la posizione politica da seguire, le attività da seguire, la tecnologia da usare e molte altre. Diventa interessante conoscere le ragioni del **perchè tali influenze occorrono** e capire perchè **in molte situazioni per un individuo può essere razionale seguire le scelte prese da altri nonostante le proprie informazioni private suggeriscano di prendere una scelta alternativa**.

In generale l'informazione che è possibile inferire dalle scelte altrui diventa più forte di quella privata che si ha a disposizione, per cui per l'individuo ha senso seguirla indipendentemente dalla propria informazione privata, ed è proprio in questo senso che si parla di **Information Cascade**. In uno scenario in cui degli individui prendono delle decisioni in sequenza e chi viene dopo è a conoscenza della scelta fatta da chi lo ha preceduto (senza conoscere l'informazione privata di questi) e dalle scelte prese, inferisce qualcosa su ciò di cui erano a conoscenza quelli che lo hanno preceduto nella scelta. Nel momento in cui l'individuo abbandona ciò che conosce come informazione privata per seguire quella inferita dal comportamento altrui allora si parla di **Information Cascade**.

L'information cascade non è pura imitazione del comportamento altrui, ma è una "una imitazione irragionevole", ma è il risultato di inferenze ottenute razionalmente e a partire da un set limitato d'informazione.

Quando si parla di imitazione 'razionale' del comportamento altrui, occorre distinguere tra due possibili classi di ragioni razionali che portano l'individuo a farlo. In generale si parla di **direct benefit effects** e di **information effects**. Il comportamento altrui lo si copia o per ottenere un beneficio diretto (ad esempio come l'adozione di una stessa tecnologia che già molte persone adottano), quindi il proprio payoff è direttamente influenzato, oppure perchè c'è un'influenza indiretta nel senso che l'informazione dell'individuo cambia in base a comportamenti osservati all'esterno che convogliano informazione verso l'individuo stesso. Queste due classi possono

essere più o meno in contrapposizione:

- Nel caso dell'uso di una stessa tecnologia non solo c'è l'informational effect ma anche il direct benefit effect, in quanto usando la stessa tecnologia già scelta da altri sarà possibile usarla senza incompatibilità;
- Nel caso della scelta di un ristorante, avendo due informazioni contrastanti, quella privata che ne suggerisce uno e quella inferita che ne suggerisce un altro, il quale ristorante però richiede una lunga attesa. In questo caso si abbandona l'informazione inferita dando più peso alla diretta **inconvenienza** che nasce nel seguirla.

Network Effects also called Direct Benefit Effect. L'individuo, nel momento in cui sceglie di 'imitare razionalmente' il comportamento altrui, lo fa seguendo uno degli network effects sopra visti. I **Direct Benefit Effects** fanno riferimento al fatto che per alcuni tipi di decisioni c'è un beneficio diretto nell'allineare il proprio comportamento a quello degli altri individui.

Esperimento in classe. Un'urna che può contenere 2 biglie rosse e 1 blu o viceversa. Di quali colori sono le biglie all'interno? Uno alla volta gli studenti estraggono una biglia, la fanno vedere e la rimettono dentro. E' importante far vedere la biglia. Ora se esce 1 rossa, probabilmente la scatola ha 2 biglie rosse. Dato che chi sceglie la biglia pensa questo, gli altri lo pensano. Quindi la mia informazione più il comportamento degli altri è uguale **al mio comportamento**. Quindi lo scopo è capire come posso tradurre le informazioni che ho dato quello che fanno gli altri.

Quindi, il secondo studente sa che il primo giocatore ha scommesso su quello che ha osservato poiché il primo è sempre razionale. Se il 3 esce R e scommette B, è perché i primi due lo hanno fatto. Ma il 4 sa che il 3 è irrilevante, quindi lo ignora, ma a sua volta è obbligato a fare la stessa scelta. Questa è l'Information Cascade, è vi è una probabilità di 1 che succeda, ma sfruttando i comportamenti degli altri si vince all' per cento.

Ma qual'è il modello che descrive il processo decisionale in condizioni di incertezza, giustificando le ipotesi fatte dagli studenti? Il modello di **Bayes** risponderà a domande come 'se sei il sesto studente e hai sentito B R R B B' cosa fai? Potrà quindi prevedere qualsiasi risultato per qualsiasi sequenza.

Il nostro modello mostrerà inoltre che le cascate d'informazioni possono non essere ottimali. In ogni caso la grandezza del gruppo non conta (se esce B B, tutti gli altri diranno B). Inoltre, queste informazioni a cascata sono

molto fragili: basterebbe che qualcuno mostrasse la propria sequenza e tutti gli altri sarebbero incerti. Cosa fare inoltre se esce R B?

Il modello di Bayes. Decision Maker under Uncertainty. E' un modo per determinare le probabilità di eventi, date delle informazioni in nostro possesso. Si utilizza la **regola di Bayes**, sfruttando le probabilità che succeda A o B, o entrambi:

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A] \cdot Pr[B|A]}{Pr[B]}$$

Con le informazioni stile il gioco delle biglie, possiamo quindi dedurre tutto ciò che ci serve, usando la formula:

$$Pr[true = A|report = A] = \frac{Pr[true = A] \cdot Pr[report = A|true = A]}{Pr[report = A]}$$

In questo modo abbiamo la probabilità che A sia vero, quindi abbiamo la probabilità che B sia vero (con le differenze per 1). **Detto questo, cosa abbiamo imparato sulle cascate?**

- **Le cascate possono essere sbagliate.** Se accettare l'opzione è in realtà una cattiva idea ma le prime due persone lo fanno, inizierà una cascata sbagliata;
- **Le cascate possono essere basate su pochissime informazioni.** Dal momento che le persone ignorano le loro informazioni private, una volta avviata una cascata solo le informazioni pre-cascata influenzano il comportamento della popolazione. Ciò significa che se una cascata inizia velocemente, la maggior parte delle informazioni private che sono collettivamente disponibili non viene utilizzata;
- **Le cascate sono fragili.** Il punto precedente, che le cascate possono essere basate su poche informazioni, le rende facili da avviare; ma può anche renderle facili da fermare. Una manifestazione di ciò è che le persone che ricevono informazioni aggiuntive possono rovesciare le cascate di vita più lunga.

La lezione più importante è prestare attenzione al comportamento della folla. La folla può sbagliare anche nel caso in cui tutti sono razionali e tutti prendono la stessa decisione.

11 [17] Network Effects

All'inizio del capitolo 16, abbiamo discusso due motivi fondamentalmente diversi per cui gli individui potrebbero imitare il comportamento degli altri. Una ragione era basata sugli effetti dell'informazione: dal momento che il comportamento di altre persone trasmette informazioni su ciò che fanno, osservando questo comportamento e copiandolo (anche contro la prova della propria informazione privata) a volte può essere una decisione razionale. Questo era il nostro obiettivo nel Capitolo 16. L'altro motivo era basato su effetti a benefici diretti, detti anche effetti di rete: per alcuni tipi di decisioni, si incorre in un beneficio esplicito quando si allinea il proprio comportamento con il comportamento degli altri. Questo è ciò che considereremo in questo capitolo.

Il valore di un social networking o media sharing il sito presenta proprietà importanti: è utile se molte persone lo stanno usando, interagendo con gli altri.

Network Effects As Externalities. Per **Esternalità** si intende una situazione in cui il benessere di un individuo è condizionato dalle azioni di altri individui e senza una compensazione reciproca bilanciata e concordata in partenza. Si parla di **esternalità positiva** quando per un individuo l'azione di un altro individuo ne incrementa il welfare (benessere) (es. uso di una stessa tecnologia). Si parla di **esternalità negativa** quando per un individuo l'azione di un altro individuo ne diminuisce il welfare (es. traffico). Il termine chiave nell'esternalità è la **non compensazione** dell'effetto su tutti gli individui. Ad esempio, nel caso in cui un individuo bene una lattina di un certo prodotto, l'esternalità sta nel fatto che con la sua azione l'individuo ha privato il resto del mondo di quella lattina, quindi il welfare degli altri. Ma non si crea esternalità quando l'individuo, pagando la lattina, ne permette la produzione di un'altra, generando una compensazione che annulla l'esternalità.

Market and Network Effects. Caso marker senza network effects: Consideriamo come funziona il mercato senza il direct-benefit effect, che si ha quando i consumatori non si curano di quanti altri fruitori del bene ci sono. Ogni individuo ha un influsso così piccolo sul resto della rete (molto grande) che ogni sua decisione non ha effetti sul comportamento degli altri.

Consideriamo un modello che sia approssimazione nel continuo di un mer-

cato molto vasto, ma con un certo numero finito di consumatori:

- Ogni individuo è rappresentato da un numero reale compreso tra 0 e 1, quindi $\frac{1}{x}$ è un individuo;
- Il set di individui compresi tra 0 e 1 rappresenta una x -esima frazione dell'insieme di partenza;
- La somma di tutti gli individui è 1;
- Ogni individuo vuol per se un'unità del bene di interesse;
- Ogni individuo, essendo una rete senza network effects, ha solo un interesse intrinseco (personale) che lo porta a voler acquistare il bene;
- Ogni individuo è associato ad un **Reservation price**, ossia il massimo prezzo che un individuo è disposto a pagare per il bene;
- Ogni reservation price è diverso da individuo ad individuo;
- I consumatori sono ordinati in ordine decrescente in base al proprio reservation price, per cui se l'individuo x ha un reservation price superiore a quello di y allora $x < y$;
- $r(x)$ è la funzione continua che denota il reservation price del consumatore x , compresa tra 0 e 1 e strettamente decrescente. +

Date queste premesse, possiamo affermare che tutti i consumatori il cui reservation price è maggiore del prezzo compreranno il bene, altrimenti non lo compreranno. Inoltre se $p = r(1)$ oppure $p < r(1)$ allora tutti compreranno il bene, altrimenti se $p = r(0)$ oppure $p > r(0)$ allora nessuno acquisterà il bene. Quindi, l'insieme di acquirenti è compreso strettamente tra $r(0)$ e $r(1)$ e tutti i consumatori tra 0 e x compreranno il prodotto e quelli tra x e 1 non lo acquisteranno. Se assumiamo P^* il costo costante del bene allora se $r(0) > P^* > r(1)$ esisterà un valore unico x^* tale che $0 < x^* < 1$ e $r(x^*) = P^*$ e x^* sarà l'**Equilibrium Quantity** del bene. Osservazione: L'inverso della funzione $r(x)$ è la funzione la domanda di mercato x^* è il valore di equilibrio poichè se meno della x^* (frazione della popolazione) ha comprato il prodotto, vuol dire che molte persone vorranno ancora comprarlo, e quindi gli acquisti saliranno. Invece, se più della x^* ha comprato il prodotto o c'è una parte di possessori che vogliono restituirlo, ci sarà un calo degli acquisti del prodotto.

Avremo che questo **Equilibrium Quantity** è **Socially Optimal**, poichè se il bene viene prodotto in quantità sufficienti a soddisfare la frazione di popolazione tra 0 e x , allora dandolo proprio a questi individui il **Social Welfare** viene **massimizzato**.

Caso Market con Network Effects. Quando si considera un mercato con network effects il consumatore è interessato all'aquisto di un bene non solo per motivazioni intrinseche all'individuo, ma anche dal numero di altre persone che utilizzano il prodotto, e più questo numero è alto, più è grande il desiderio nell'individuo di acquistare il prodotto. Consideriamo il **modello**: ci sono **due funzioni** che operano insieme. Il **Reservation Price** di un individuo x è uguale a $r(x) \cdot f(z)$, dove $r(x)$ è l'interesse intrinseco dell'individuo a prodotto e $f(z)$ è la funzione che misura il beneficio per ogni consumatore dato dal fatto che la frazione di popolazione z possenga il bene. Osservazione: Nel modello corrente abbiamo $f(0) = 0$, quindi se nessuno ha acquistato il prodotto nessuno è disposto a pagarlo e $r(1) = 0$, per semplicità. Se p^* è il costo del bene, allora l'individuo x acquisterà il bene se $r(x) \cdot f(z) \geq p^*$, se $z = 0$ e quindi $r(x) \cdot f(0) = 0 < p^*$, se $r(x) \cdot f(z) = 0 < z < 1$ (in quest'ultimo caso la popolazione di consumatori disposti ad acquistare il bene è quella frazione di consumatori compresa tra 0 e z , per cui $r(x) \cdot f(z) = p^*$). In questo caso L'**Equilibrium Quantity** è z , con $p^* = r(z) \cdot f(z)$. Prendiamo un esempio concreto per comprendere meglio p^* : Se $r(x) = 1 - x$ ed $f(z) = z$, allora $p^* = r(z) \cdot f(z) = (1 - z)z$ (l'equazione della parabola), quindi $p^* = 0$ se $z = 0$ e anche se $z = 1$. p^* è massimo per $z = \frac{1}{2}$, in questo caso $p^* = \frac{1}{4}$.

- Quando $p^* > \frac{1}{4}$ allora l'unico equilibrio è quello di $z = 0$, che corrisponde ad un bene che semplicemente è troppo costoso e quindi l'unico equilibrio si ha quando nessuno lo possiede;
- Quando p^* è compreso tra 0 e $\frac{1}{4}$ ci sono tre possibili condizioni di equilibrio: 0, z' e z'' :
 - Quando z è compreso tra 0 e z' , non è un Equilibrium Quantity poichè essendo $r(z) \cdot f(z) < p^*$, l'individuo z che ha acquistato il prodotto e tutti quelli prima di lui valutano il bene meno del suo prezzo, per cui non avrebbero voluto acquistarlo facendo calare la domanda;

- Quando z è compreso tra z'' e 1 , $r(z) \cdot f(z) < p^*$, poichè l'individuo z ha acquistato il prodotto (e gli altri prima di lui) e non vorrebbe averlo acquistato, quindi c'è un calo della domanda;
- Quando z è compreso tra z' e z'' , allora $r(z) \cdot f(z) > p^*$, per cui l'individuo z desidera il prodotto ed è disposto a pagarlo più di p^* , e quindi cresce la domanda del bene.

(z sono sempre le persone che hanno acquistato il prodotto). Osservazione: z'' ha una **Strong Stability Property** nel senso che se z è leggermente superiore o leggermente inferiore a z'' , allora la domanda tenderà a riportare il sistema in una condizione di equilibrio z'' .

z' invece è un **Critical Point o tipping Point**, perchè se z è leggermente inferiore di z' allora c'è una spinta verso il basso della domanda che allontana da z' dal nuovo punto di equilibrio 0 ; Se z è leggermente superiore a z' , allora c'è una spinta di crescita della domanda che la allontana da z' e la porta verso z'' (che è il nuovo punto di equilibrio). z' è il punto da superare per ottenere il successo del prodotto. Importante è anche il valore di P^* , poichè più basso è il suo valore, più bassa sarà la retta $y \leq p^*$ che taglia la parabola e da qui ne derivano due conseguenze molto importanti: z' e z'' saranno sempre i due punti estremi della parabola, quindi il punto critico sarà più facile da superare e essendo più estremo anche z'' allora maggiore sarà il numero di individui compresi tra z' e z'' . Ovviamente un p^* troppo basso porterebbe alla vendita di un prodotto il cui prezzo di acquisto sia inferiore del costo di produzione, per cui il produttore andrebbe in perdita. (caso particolare: trial version, fa crescere il numero di utilizzatori senza profitto immediato ma atteso in futuro proprio con il crescere degli utilizzatori).

Mercato Dinamico. Finora il modello di mercato considerato prevedeva dei consumatori in grado di predire correttamente il numero di possessori del bene. Quando invece la stima del numero di utilizzatori del prodotto non è corretta, quindi quando il numero di possessori creduto \mathbf{z} fosse diverso dal numero dei possessori reali, allora il consumatore \mathbf{x} , basandosi sulla convinzione di z (comune a tutti i consumatori), acquisterà il prodotto se $r(x)f(z) \geq p^*$. In questo caso, occorre trovare almeno il valore \hat{z} che renda valida l'espressione $r(\hat{z})f(z) = p^*$, per cui $r(\hat{z}) = \frac{p^*}{f(z)}$ e da qui è possibile trovare \hat{z} come funzione inversa di $r()$ e a partire dal valore z creduto abbiamo che $\hat{z} = r^{-1}\left(\frac{p^*}{f(z)}\right)$.

Se \hat{z} non esiste vuol dire che nessuno acquisterà il prodotto. Definita $g(z)$ la funzione che permette di trovare \hat{z} a partire da z possiamo fare delle considerazioni: In generale in una rete con **Network Effects** ci aspettiamo di vedere una relazione tra il numero atteso e il numero reale di acquirenti che segue tale andamento, e tracciando la retta $\hat{z} = z$, con la curva $\hat{z} = g(z)$ sulla retta con i punti di equilibrio che saranno stabili o instabili in base al fatto che la curva passi sopra o sotto la retta (vedi grafico sul quaderno). Se sopra vuol dire che ci sarà una spinta in crescita all'acquisto del prodotto, mentre quando la curva passa sotto la retta c'è una spinta in calo dei consumi del prodotto ed è proprio questo che stabilisce se i punti di contatto tra la curva e la retta sono punti di equilibrio stabili o instabili.

12 [18] Power Laws and Rich-Get-Richer Phenomena

12.1 Popularity as a Network Phenomenon

Studiamo la popolarità come fenomeno che riguarda le reti (siano essere reti sociali o information Network o altro). La popolarità è un fenomeno caratterizzato da estremi squilibri:

- Tutti siamo popolari per le poche persone che fanno parte della nostra cerchia sociale;
- Poche persone raggiungono grande visibilità;
- Pochissime persone raggiungono la popolarità a livello globale.

Ma come possiamo **quantificare** questi squilibri? Perché **nascono**? Sono in qualche modo **intrinseci** all'idea di popolarità? Come **dominio concreto** per **misurare** accuratamente la popolarità, ci concentriamo su; **Web**, prendendone uno snapshot e analizzandone la struttura. Consideriamo come **misura della popolarità** di una **pagina** il **numero** dei suoi **in-links**, **K**.

Osservazione: Un altro valore di K indica grande popolarità.

Ci chiediamo com'è distribuita la popolarità tra le pagine Web, quindi dato un certo K qual'è la porzione di pagine Web che K in-links.

Modelliamo la struttura a link del web assunto che ogni pagina decida indipendentemente e a caso se collegarsi ad un'altra pagina, per cui avremo

che il numero di in-links per pagina è la **somma** di molti links indipendenti e casuali (che non è altro che la prima parte del teorema del limite centrale). Secondo questo modello ci aspettiamo che la distribuzione di in-links per pagina rispetti la **distribuzione standard gaussiana** giustificata dal **teorema del limite centrale**. Considerando vera l'assunzione di una distribuzione gaussiana, otteniamo che una popolarità grande è improbabile, ossia ad un altro valore della popolarità corrisponde un basso valore sulle y. L'assunzione della distribuzione gaussiana è la diminuzione esponenziale del numero di pagine con K in-links in funzione di K e quanto più K diventa grande: la probabilità di osservare un valore che supera il valor medio più di c volte la deviazione standard diminuisce esponenzialmente in c (poichè più ci spostiamo dal valor medio più la curva si abbassa).

12.2 Empirical Finding and Power Law

Sebbene il modello precedentemente definito suggerisca che la distribuzione della popolarità nel Web segue la distribuzione gaussiana, tuttavia da **studi empirici** condotti su diversi snapshot del Web, presi in differenti momenti della vita del Web, si è dedotto che **la frazione di pagine Web con K in-links è approssimativamente proporzionale a $\frac{1}{K^c}$** $\mapsto f(x) = \frac{1}{K^c} = K^{-c}$, con $2 < c < 3$ e $c = 2.1$. Il punto cruciale è che $\frac{1}{K^{2.1}}$ decresce molto più lentamente al crescere di K, per cui le pagine con un gran numero di in-links sono molte di più rispetto a quello che ci si aspetterebbe a partire da una distribuzione gaussiana (o normale)(una conseguenza immediata è l'emergere più probabile di hubs). In matematica la funzione $f(x) = a \cdot x^{-b}$ ($\iff f(k) = 1 \cdot K^{-c}$) con a e b numeri reali, è detta **power law o legge di potenza**. Perciò sebbene in natura sia molto diffusa la distribuzione gaussiana, le power law descrivono la distribuzione dei dati qual'ora le quantità misurate possano essere viste come popolarità. La popolarità segue la legge di potenza $\frac{1}{K^c}$ e nel caso del web $c = 2.1$.

Osservazione: Il modo per verificare che la distribuzione dei dati che si stanno analizzando segua una power law $f(k) = a \cdot k^{-c}$ è rappresentare tale andamento su scala logaritmica e vedere una retta. Se vale la distribuzione power law, allora presa $f(k) = \frac{a}{K^c}$, con a e c costanti, si vede che applicando il logaritmo a entrambi i membri ($\log \cdot f(k) = \log a \cdot k^{-c} = \log a - c \cdot \log k$), non abbiamo altro che l'equazione della retta, $y = mx + q$, dove m è c, la pendenza.

12.3 Rich get Richer Model

Studiamo il modello rich-get-richest per capire come mai la popolarità non segue una distribuzione standard ma una power law. Partiamo da questa assunzione: le persone tendono a **copiare il comportamento** delle altre persone e copiano le decisioni prese da altre persone prima di loro per due motivi: **information cascade** e **network effects o benefict effects**. A partire da questa assunzione consideriamo un semplice modello per la creaaazione di link tra pagine Web:

- **1.** Le pagine sono create in sequenza 1, 2, ... , n;
- **2.** Quando la pagina J partecipa alla rete, allora viene creato un **link** in accordo alle seguenti **Regole Probabilistiche**:
 - **a.** con una probabilità p si crea un arco (J, i) uniformemente e a caso, con i una pagina che già partecipa alla rete;
 - **b.** con una probabilità 1-p, scelto i, si crea un arco (J, l), con l una pagina luntata da i (questo è chiamato **copying behaviour**).

Nel punto b del precedente schema c'è un punto cruciale del modello, ovvero il **copying behaviour**: l'autore della pagina J non crea un link tra la pagina J e la pagina i, ma copia il comportamento della pagina i (il quale aveva creato un link da i a l), per cui crea un link dalla pagina J alla pagina l. Con questo modello la porzione di **pagine** con **K in-links** sarà distribuita approssimativamente secondo una power law $\frac{1}{K^c}$. Un'altra possibile formulazione del passo b è la seguente: La pagina J sceglie una pagina l con una probabilità che è direttamente proporzionale al numero di **in-links** di l. Il fatto che con l'ingresso di un nuovo nodo nella rete si crei un arco verso la pagina l in funzione del numero di in-links di l è detto **preferenzial attachment** ed è un principio introdotto da Barabasi e Albert, nel 1999, per spiegare il potere del comportamento nelle reti sociali. Il modello è una buona spiegazione dell'**emergere** degli **hubs**. Il fenomeno del **preferenzial attachment** è anche detto **Rich-get-richer Rule** e fa riferimento al fatto che i link all'interno di una pagina sono creati preferibilmente verso le pagine che hanno già grande popolarità. E' per questo che non deve stupire il fatto di trovare nel Web una distribuzione di in-links che approssima una power law invece che una gaussiana.

12.4 The Unpredictability of RGR Effect

Indipendentemente dalla tipologia di oggetto considerato, quindi sia esso una pagina Web, un libro, una canzone o comunque un qualunque oggetto che possa assumere una certa popolarità, ciò che conta sono i primi passi che l'oggetto muove verso questa popolarità, poichè raggiunto un certo livello, saranno le dinamiche del modello rich-get-richest che con buona probabilità faciliteranno l'ascesa di popolarità dell'oggetto stesso. Tuttavia la fluttuazione iniziale è imprevedibile: effetti casuali nella fase iniziale del processo di ascesa alla popolarità giocano un ruolo molto importante che determinano il livello di popolarità raggiungibile nelle fasi successive. Come caso d'esempio prendiamo il successo del libro Harry Potter e chiediamoci se, tornando indietro negli anni della nascita del personaggio e ripercorrendo nuovamente tali anni di nuovo, il libro avrebbe raggiunto nuovamente un tale successo o se invece sarebbe caduto nell'ombra. Se la storia fosse ripetuta più volte, è probabile che, sebbene ogni volta sarebbe intervenuta la power law sulla distribuzione della popolarità, tuttavia non è detto che ogni volta lo stesso oggetto raggiunga la stessa popolarità, quindi non è detto che per ogni esecuzione sarebbero più popolari i medesimi oggetti. Sebbene un esperimento per provare ciò è irrealizzabile, Salganik, Dodds e Watts hanno creato un esperimento per supportare empiricamente questa ipotesi: hanno creato un sito per scaricare musica con 48 canzoni sconosciute di diversa qualità e di gruppi musicali diversi. Ogni utente che accede al sito può ascoltare le varie canzoni e al termine della sessione scegliere quale scaricare. Inoltre è possibile visualizzare il numero di download per canzone. Per riprodurre l'effetto di ripetere la storia, a diversi visitatori, è stata proposta la medesima copia del sito a loro insaputa, quindi si è cercato di riprodurre delle sessioni parallele. Sebbene ogni sessione è proceduta in maniera distinta, è stato rilevato che le canzoni migliori non sono mai finite in basso alla lista delle canzoni ordinate per numero di download e le canzoni peggiori non sono mai finite in alto alla medesima lista. Proponendo poi una versione del sito dove non era possibile visualizzare il numero di download associato ad una certa canzone, si è notato come la variazione di download tra canzoni sia stata minore, non essendoci stato l'effetto delle dinamiche rich-get-richest.

Il successo di un libro, film o pagine Web è quindi fortemente condizionato dalla social influence, ma sono le fluttuazioni iniziali che sono imprevedibili e possono determinare il successivo ruolo di un nodo in una rete.

12.5 The Long Tail

La distribuzione normale o gaussiana, governata dalla teoria del limite centrale non è corretta per rappresentare la distribuzione della popolarità nelle reti sociali, occorre infatti seguire la power law: $p(K) \simeq K^{-c}$. Associamo la popolarità al numero di in-links del nodo, il grado o degree del nodo e la distribuzione della popolarità tra nodi della rete alla power law. La distribuzione della popolarità può avere importanti conseguenze di business particolarmente per tutte quelle compagnie che si occupano della vendita di libri, musica e film. Per la power law, maggiore è la popolarità, minore è il numero di prodotti che la raggiungono. Quindi tali rivenditori si troveranno davanti a 'hits' oppure a 'riches products' (prodotti che si rivolgono a piccoli gruppi di utenti). Chris Anderson nel suo lavoro 'The Long Tail' del 2004 afferma che l'industria dell'intrattenimento si sta sempre più spostando verso la lunga coda di prodotti di nicchia che riescono insieme a raggiungere un gran numero di pubblico, anche grazie ai servizi digitali online che non richiedono magazzini fisici e che portano grandi introiti alle case di intrattenimento. Anderson propone di focalizzarsi non sulle hits, ma sulla lunga coda, al fine di stimare le vendite sul mercato dei prodotti di nicchia. Quantificare l'importanza della longtail inoltre permette di meglio comprendere la power law. [Vedi considerazioni sui grafici sul quaderno].

12.6 Effect of Search tools and recommendation Systems

Relativamente alla popolarità e alla sua distribuzione ci chiediamo se moderni tool di ricerca in Internet rendono le dinamiche del modello RGR più estreme o meno. La risposta è entrambe. Le dinamiche diventano più estreme per il fatto che se i motori di ricerca nelle prime posizioni dei risultati restituiscano le pagine più popolari, allora il **preferenzial attachment** sarà più estremo della ricerca. Ma allo stesso tempo ci sono altre forze che rendono le dinamiche meno estreme, ad esempio:

- Le query poste a questi tools di ricerca (come Google) sono differenti, ossia hanno Keyword diverse, per cui anche le risposte fornite da Google saranno differenti, e questo cambia il comportamento associato ad una cerca Keyword. Quindi la stessa Keyword, in funzione della query a cui è associata, produce differenti risultati;
- Le risposte sono mirate e personalizzate, per cui l'utente riesce a entrare

in contatto con pagine anche impopolari;

- I sistemi di raccomandazione nel proporre nuovi possibili oggetti di interesse rispettano non solo l'accuracy ma anche la **Serendipity**, che permette all'utente di entrare a contatto con prodotti non popolari o prodotti di nicchia, e ciò è indispensabile per quelle compagnie come Amazon o Netflix che riescono a rendere l'utente consapevole dell'esistenza di questi prodotti e gliene agevolano la fruizione.

Quindi in generale effetti complessi intervengono insieme in sistemi già complessi di cause ed effetti, dove non ci sono andamenti predicibili, proprio per permettere l'accesso ai prodotti nella 'lunga coda', quindi è difficile predirne gli effetti.

12.7 Analysis of Rich-Get-Richer Processes

Secondo il modello RGR una rete orientata cresce con una distribuzione degli in-link che approssima una power law

$$f(x) = \frac{1}{x^c} \quad (1)$$

con c che dipende dal comportamento dei nodi della rete.

Analizziamo meglio il modello RGR per capire come si arrivi ad una power law.

Sia $X_J(t)$ una variabile che indica il numero di in-links di j al tempo t .

Osservazione: $X_J(J) = 0$, cioè il nodo j creato al tempo j non ha archi in ingresso $t > J$.

Vediamo l'evoluzione del processo:

- $X_J(J) = 0$, cioè al tempo della creazione del nodo j , j non ha archi in ingresso.
- $X_J(t + 1)$. Nello step $t + 1$, il nodo j acquisisce un in-link solo se il nuovo nodo creato nello step $t + 1$ punta a lui.

Preso il nodo $t + 1$ esimo, questo punterà a:

- con probabilità p ad un altro nodo preso a caso nella rete.

- con probabilità $1 - p$ ad un nodo con probabilità direttamente proporzionale al numero di in-links del nodo.

Per cui, riconsiderando il nodo j e la probabilità che il nodo $t + 1$ esimo punti a lui, diremo che:

- la probabilità che il nodo $t + 1$ esimo punti a j è $\frac{1}{t}$ con j scelto a caso.
- la probabilità che il nodo $t + 1$ esimo punti a j è $\frac{X_J(t)}{t}$ con j scelto in base al numero di suoi in-links, dove il numeratore è il numero di link che puntano a j della rete e il denominatore è il numero di link totali della rete.

Allora la probabilità che il nodo $t + 1$ esimo punti a j è:

$$p\left(\frac{1}{t}\right) + (1 - p) \cdot \frac{X_J(t)}{t} \quad (2)$$

e

$$X_J(t + 1) = X_J(t) + p\left(\frac{1}{t}\right) + (1 - p) \cdot \frac{X_J(t)}{t} \quad (3)$$

dove gli ultimi termini sono il *cambiamento atteso*.

A partire da tale modello per scoprire la power law usiamo un modello semplificato che porti il modello da probabilistico a deterministico.

Osservazione:

Essendo il modello semplificato, questo non ci permette di dire che il modello originale si comporta allo stesso modo, ma la rimilitarità tra i modelli permette di trovare delle evidenze che possono essere verificate da successive analisi del modello originale.

Nel **modello deterministico** tutto evolve in modo prefissato nel tempo, secondo delle regole e condizioni iniziali specifiche.

Il modello prevede che il tempo scorra da 0 a N nel continuo, invece che nel discreto (gli ste 1, 2, ..., n) e approssima l' $X_J(t)$ ad una funzione $x_J(t)$, funzione continua nel tempo.

Caratterizziamo la funzione $x_J(t)$ con due proprietà, che approssimino la condizione iniziale e il cambiamento atteso.

$$X_J(j) = 0 \implies x_J(J) = 0 \quad (4)$$

Poichè il nodo j al momento della creazione non ha archi in ingresso:

$$\frac{p}{t} + \frac{(1-p) \cdot X_J(t)}{t} \implies \frac{dx_J}{dt} = \frac{p}{t} + \frac{(1-p) \cdot x_J}{t} \quad (5)$$

ossia per l' $X_J(t)$ supponiamo di avere un N molto grande, con t che assume valori da 0 ad N nel continuo. Allora usiamo x_J con approssimazione deterministica del numero di in-link del nodo j nel tempo e usiamo l'equazione differenziale per modellare il cambiamento atteso:

$$\frac{dx_J}{dt} = \frac{p}{t} + \frac{(1-p) \cdot x_J}{t} \quad (6)$$

Ora, ponendo per semplicità $q = 1 - p$, allora

$$\frac{dx_J}{dt} = \frac{p}{t} + q \cdot \frac{x_J}{t} \quad (7)$$

e risolvendo l'equazione differenziale:

- dividiamo entrambe le parti per $p + q \cdot x_J$

$$\frac{1}{p + q \cdot x_J} \cdot \frac{dx_J}{dt} = \frac{1}{t} \quad (8)$$

- integrando entrambe le parti e successivamente moltiplicandole per q :

$$\int \frac{1}{p + q \cdot x_J} \cdot \frac{dx_J}{t} = \int \frac{1}{t} dt \quad (9)$$

ricordando che $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$$\ln(p + q \cdot x_J) = q \cdot \ln(t) + c \quad (10)$$

- esponenziando entrambe le parti e ponendo $A = e^c$

$$e^{\ln(p+q \cdot x_J)} = e^{\ln(t^q)+c} \quad (11)$$

se $e^{\ln(a)} = a$,

$$p + q \cdot x_J = t^q \cdot e^c \quad (12)$$

$$p + q \cdot x_J = A \cdot t^q \quad (13)$$

quindi

$$x_J(t) = \frac{1}{q} \cdot (A \cdot t^q - p) \quad (14)$$

- adesso sfruttando la condizione iniziale per cui $x_J(J) = 0$, troviamo il valore di A da:

$$x_J(J) = 0 = \frac{1}{q} \cdot (A_J^q - p) \iff \text{la funzione trovata in precedenza, con al posto di } t \text{ il } j \quad (15)$$

e

$$A = \frac{p}{J^q} \quad (16)$$

e

$$x_J(t) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p}{J^q} \cdot t^q - p \right) = \frac{p}{q} \left[\left(\frac{t}{j} \right)^q - 1 \right] \quad (17)$$

che esprime come x_J cresce nel tempo.

Ora, dato un certo valore K e un tempo t, qual'è la frazione di funzioni x_J che soddisfano $x_J(t) \geq K$?

$$x_J(t) = \frac{p}{q} \left[\left(\frac{t}{j} \right)^q - 1 \right] \geq K \quad (18)$$

prima esprimiamo la disequazione in termini di J er per approssima le frazioni che soddisfano $x_J(t) \geq K$ usiamo la derivata

$$j \leq t \left[\frac{q}{p} \cdot K + 1 \right]^{-\frac{1}{q}} \quad (19)$$

ed

$$F(K) = \frac{1}{t} \cdot t \cdot \left[\frac{q}{p} \cdot k + 1 \right]^{-\frac{1}{q}} \quad (20)$$

$F(K)$ è la frazione di nodi con esattamente grado/degree K.

Facendo la derivata otteniamo che:

$$\frac{dF}{dK} = \frac{1}{q} \cdot \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{q}{p} \cdot K + 1 \right)^{-1-\frac{1}{q}} \quad (21)$$

$$f(K) \simeq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{q}{p} \cdot K + 1 \right)^{-\left(1+\frac{1}{q}\right)} \quad (22)$$

e

$$e = 1 + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{1-p} \quad (23)$$

Così abbiamo trovato la power law.

Ora,

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right) = \infty \quad (24)$$

quindi se $p \implies 1$, allora:

- scelta random
- RGR non ha effetto dominante
- grandi degree sono rari.

Se invece

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right) = 2 \quad (25)$$

- la crescita è governata dal *preferenzial attachment*
- si formano degree molto alti

Per le reti reali è: $2 < c < 3$

12.8 Considerazioni

1. La popolarità è descritta dalla power law, che esplicita la creazione di Hubs, l'attrazione che alcuni prodotti riescono a guadagnarsi.
2. La distribuzione normale non riesce a esprimere correttamente la distribuzione della popolarità.
3. Il modello RGR, anche conosciuto come *preferenzial attachment*, fornisce dei chiarimenti sulla popolarità e la sua distribuzione: gli effetti di feedback e della copia dei comportamenti sono molto semplici da integrare e migliorano la comprensione della formazione della power law.
4. Sebbene sia possibile predire la distribuzione generale, non è possibile predire il successo di un certo prodotto.
5. L'osservazione della *long tails* apre grosse opportunità per le compagnie.
6. Queste conoscenze sono applicate ai nuovi sistemi e le dinamiche possono nuovamente cambiare.

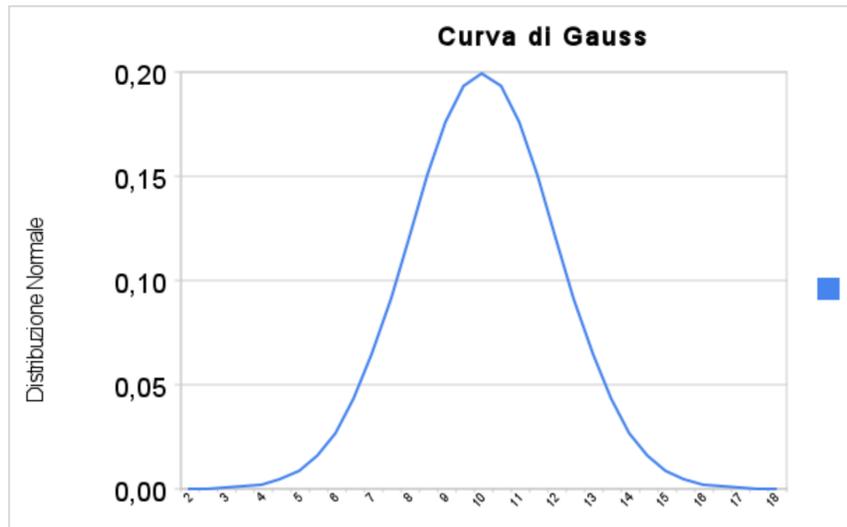
12.9 Ripasso

12.9.1 La curva gaussiana

La curva di Gauss o curva a campana è una funzione simmetrica rispetto all'asse x (cioè $f(x) = f(-x)$).

Alla curva di Gauss è legata l'idea di curva per descrivere i dati. Quando si effettuano tante misurazioni di una stessa grandezza con un certo strumento, si avranno risultati differenti, dovuti all'imprecisione dello strumento generata dalla persone che lo utilizza.

Se si rappresentano le misure su un grafico e se il numero di misurazioni è molto elevato, la curva che si ottiene è proprio la curva di Gauss, che rappresenta la densità di valori con una distribuzione normale.



La curva è caratterizzata da un *massimo* attorno alla *media* dei valori misurati ed è più o meno stretta a seconda della dispersione dei valori attorno alla media. La dispersione si misura con la *deviazione standard*.

La distribuzione gaussiana prevede che dati gli n valori, questi si distribuiscano intorno al valor medio (non al valore massimo), per cui i valori più ricorrenti sono quelli vicino al valore medio e non a quello più alto.

Al contrario, le leggi di potenza ammettono pochi valori altissimi. Le power laws che rispettano la forma $\frac{1}{K^c}$, con c e K reali, descrivono un andamento più lento.

La distribuzione Gaussiana è utilizzata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali o valori reali che tendono a concentrarsi attorno ad un singolo valor medio.

μ indica la media della distribuzione

σ è la deviazione standard

I valori $x = \mu \pm \sigma$ rappresentano le ascisse dei punti di flesso della funzione.

La curva in $x = \mu$ raggiunge il valore massimo che dipende da σ in modo inversamente proporzionale: al diminuire di σ , la curva si contrae attorno al valore medio, che si innalza.

Una gaussiana con σ grande, cioè una gaussiana larga, sarà indice di una misura poco precisa, mentre se la distribuzione è molto addensata attorno al valor medi μ , la misura risulta molto precisa.

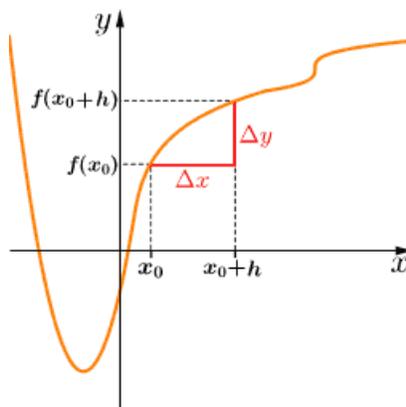
Note:

La deviazione standard o scarto quadratico medio è un indice di dispersione statistico, vale a dire una stima della variabilità di una popolazione di dati o di una variabile casuale.

Esprime la dispersione dei dati intorno a d un indice di posizione. Esprime quanto i dati si discostano dalla media. Hanno uno scarto rispetto alla media pari a σ , quindi vuol dire che posso considerare il range di dati come il range che va da μ a $\mu \pm \sigma$; ci saranno anche dei dati oltre a $\mu \pm \sigma$, ma bisogna pensare a questo range come l'area in cui sono concentrati i dati.

12.9.2 Derivate e differenziali

Sia una funzione derivabile $f(x)$ e a valori derivabili. La derivata della funzione nel punto x_0 è $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ Il rapporto incrementale è



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (26)$$

con h l'incremento, una lunghezza sull'asse delle ascisse (x).

La *derivata* di una funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento.

Il *differenziale* non è altro che l'incremento su y , fatto sulla tangente e non sulla funzione. Si dimostra che per Δx che tende a 0, allora

$$\Delta y \simeq \Delta x \quad (27)$$

Il *differenziale* di una funzione è uguale alla derivata della funzione stessa moltiplicata per l'incremento dx , per cui

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (28)$$

12.9.3 Teorema del limite centrale

Sia data una popolazione numerica infinita di media μ e deviazione standard σ , da cui vengono estratti dei campioni casuali formati ciascuno da n individui, con n abbastanza grande ($n > 30$).

La distribuzione delle medie campionarie (La media campionaria è la media degli N valori osservati di una variabile aleatoria X) tende a una distribuzione gaussiana di media $\mu_x = \mu$ e deviazione standard $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

In altre parole, anche in una popolazione che non segue il modello gaussiano, le medie campionarie, se calcolate su campioni abbastanza grandi, tendono a distribuzioni secondo una legge gaussiana.

Ricapitolando, il teorema del limite centrale dice che la somma (o la media) di un grande numero di variabili aleatorie indipendenti e dotate della stessa distribuzione ha una distribuzione normale, indipendentemente dalla distribuzione della singola variabile.

In altre parole, data una certa distribuzione d , con d che non è una distribuzione normale, estraendo a caso campioni, ossia gruppi di elementi estratti in modo casuale e di dimensione n da d , se calcoliamo per ciascun campione la media campionaria, ossia la media degli elementi, per n grande ($n > 30$), avremo che la media delle medie campionarie tende a una distribuzione normale, indipendentemente dalla forma della distribuzione della popolazione da cui i campioni sono estratti.

13 [19] Cascading behavior in networks

Se con i modelli di *information cascade*, *network effects* (o *direct benefict effect*) e *rich get richer* gli individui, nelle proprie scelte, considerano il comportamento complessivo della rete e le scelte fatte in precedenza da tutti gli altri nodi della rete, in questo caso il modello va a considerare ad un livello più locale come gli individui sono condizionati nelle scelte dai propri vicini, quindi considera maggiormente la struttura della rete.

Molte delle nostre interazioni con il resto della rete avvengono a livello locale e non a livello globale. Spesso quello che ci interessa sono le scelte a livello locale e non globale della rete: ad esempio, nel caso della scelta di utilizzo di una certa tecnologia, indipendentemente dal resto della rete, siamo interessati a sceglierne una che sia compatibile con quella già scelta dai nostri vicini, amici o colleghi di lavoro.

Si è detto che ci sono due grandi motivi che portano un beneficio ad un individuo che imita il comportamento degli altri individui della rete:

- **information effect**, basato sul fatto che le scelte prese dagli altri sono un modo indiretto di trasmettere all'individuo una loro informazione privata.
- **direct benefict effects**, basata sul fatto che imitare il comportamento altrui porta un diretto beneficio all'individuo che lo fa, ad esempio nel caso della tecnologia garantisce la compatibilità.

Quello che si vuole analizzare è come questi effetti operino nel momento in cui l'individuo, scegliendo, imita il comportamento dei propri vicini nella rete.

Lo studio di come evolve la *diffusione/adozione di nuove idee in una rete* è consentito come **the diffusion of innovation**. Esempi di studi di tal genere sono ad esempio quello condotto da Ryan e Gross, relativamente alla diffusione dell'adozione da contadini dell'Iowa dei semi di mais ibridi o la diffusione sempre negli USA della prescrizione di droghe da parte dei dottori.

Questi studi sono esempi di influenza da persona a persona basata su *informational effects*: le decisioni di adozione o meno dell'innovazione è presa in un **Contesto di struttura sociale in cui un individuo può vedere ciò che fanno i propri vicini** (probabilmente in opposizione al game theory in cui si fa di tutto per nascondere le motivazioni delle proprie scelte).

In generale, ciò che sancisce il successo di una innovazione, anche quando sia evidente che la sua adozione porti a dei benefici, dipende dalla sua:

- **complessità** di utilizzo e comprensione
- **osservabilità** il fatto che sia visibile che un certo individuo le stia adottando
- **triability** possibilità di adottarla gradualmente, limitando i rischi possibili nella sua adozione
- **compatibility** la compatibilità rispetto al sistema in cui sta per essere adottata
- **homophily** il principio di omofilia entra in gioco come barriera alla diffusione di una certa innovazione, in quanto essendo che le persone tendono ad interagire con altre simili a loro operando in gruppi ed essendo l'innovazione qualcosa che arriva dall'esterno, può essere difficile per tale innovazione farsi strada nei gruppi/cliques della rete sociale.

Individual level model for the diffusion of a new behaviour. Consideriamo un modello a livello individuale di diffusione di una nuova idea basato su un direct-benefits effects.

In una siffatta rete per un individuo, il beneficio generato dall'adozione del nuovo comportamento cresce al crescere del numero di vicini che nella rete già lo adottano (esempio uso di una certa tecnologia hardware o software).

In tale rete, ogni nodo è incentivato ad assumere lo stesso comportamento del proprio vicino e questa caratteristica si ricollega ai *coordination games*.

Nel gioco, v e w sono i players e A e B sono le strategie. Il payoff, invece, è definito come segue: se le strategie dei due giocatori combaciano, allora il payoff è positivo, altrimenti sarà 0. La matrice di payoff corrispondente è:

	A	B
A	a,a	0,0
B	0,0	b,b

La matrice si riferisce ad una singola coppia di nodi collegati ad un arco, ma tale matrice vale per ogni coppia di nodi vicini che esistono nella rete.

Per ogni nodo il proprio payoff sarà la somma di tutti i payoff ottenuti giocando con ognuno dei suoi vicini.

La scelta finale avviene secondo una semplice *decision rule*: dato un nodo v , la frazione p dei suoi d nodi vicini adotta la strategia **A** e la frazione $(1-p)$ adotta la strategia **B**, quindi se v sceglie A allora otterrà come payoff pda , mentre qual'ora scelga B otterrà come payoff $(1-p)db$; a questo punto A sarà la scelta migliore se $pda \geq (1-p)db$, da cui si ottiene $p \geq \frac{b}{a+b}$.

Indicando la frazione a destra della disequazione con q , allora diremo che $q = \frac{b}{a+b}$.

Diremo che q rappresenta la **soglia** per cui qualora almeno q vicini di v adottino A, allora anche v lo farà.

Osservazione: I due equilibri si hanno quando tutti adottano A o tutti adottano B.

Si considera l'evoluzione della rete partendo da una rete in cui tutti i nodi tranne quelli "**initial adopter**" usano B al contrario proprio degli initial adopter che scelgono di usare A. Si procede per step successivi in cui ad ognuno, ogni nodo valuta se adottare o meno la strategia A in base al fatto che il numero di vicini che l'adottano superi o meno il valore soglia q .

Se la soglia è soddisfatta, si genera una **reazione a cascata**, che può avere due risvolti: se la cascata è una **completed cascaded** vuol dire che tutta la rete è passata ad A; altrimenti vuol dire che l'effetto a cascata si è interrotto.

In generale, l'effetto a cascata può essere interrotto dall'effetto **homophilia** e dal fatto che in una rete possano esistere gruppi di nodi tra loro ben collegati e poco collegati con gli altri che ostacolano la diffusione della nuova strategia.

Nel momento in cui l'effetto a cascata si arresta si ottiene una rete mista, in cui parte dei nodi utilizza A e l'altra parte B. Questa suddivisione avviene sempre in base alla scelta dei propri vicini, poichè quello che interessa al nodo è avere affinità con i propri vicini, indipendentemente da ciò che è stato scelto dal resto dei nodi della rete.

Ad esempio, è interessante come differenti social networking sites sono dominati da diversi gruppi di persone con età o stili di vita simili.

Per incentivare maggiormente il passaggio di un nodo da B ad A, superando il punto di blocco, è possibile aumentare la qualità del prodotto A che altera la matrice di payoff (aumentando il payoff di A) con la threshold per l'adozione di A che si abbassa.

Se invece non è possibile migliorare la qualità del prodotto, una strategia utile è scegliere dei nodi/persona che usano B e convincerle a passare ad A: la scelta delle persone è fondamentale per superare il punto di blocco. Inoltre è

interessante notare il contrasto tra population level network effects e l'effetto a cascata a livello locale sull'adozione di un prodotto tra i nodi della rete: in un modello a livello di intera rete, dove ognuno sceglie di adottare un certo prodotto in base alla porzione dell'intera popolazione che lo sta usando, per il nuovo prodotto è molto difficile iniziare a diffondersi, mentre se l'interesse dell'individuo risiede solo su cosa hanno scelto i propri vicini, è possibile che l'uso di pochi individui diventi l'input per una grande diffusione nella rete.

Cascades and clusters. Cosa interrompe la diffusione di una nuova tecnologia o di un nuovo comportamento?

La diffusione di un nuovo comportamento in una rete può essere bloccata quando cerca di accedere in un gruppo molto connesso di nodi nella rete, dove è alta l'omofilia. Si è detto infatti che l'omofilia ostacola la diffusione di innovazione che arriva dall'esterno e cerca di accedere in una comunità densamente connessa.

Densely connected community e cluster. Un cluster di densità p è un set di nodi tale che ogni nodo nel cluster ha almeno una p frazione di suoi nodi vicini nel cluster.

La struttura di un cluster ci può dire se la cascata avrà successo o meno. Una cascata si ferma quando cerca di accedere in un cluster denso. Questo è l'unico motivo per cui una cascata può essere arrestata: **i cluster sono gli unici ostacoli della cascata.**

Diremo che considerati un set di nodi adottatori iniziali del comportamento A e un threshold q per gli altri nodi della rete che adotteranno A :

1. Se la rete restante contiene dei cluster di densità maggiore di $1 - q$, allora il set di adottatori iniziali non genererà una cascata completa.
2. Ogni volta che il set di nodi adottatori iniziali non causa una cascata completa con un threshold q , la rete restante deve contenere un cluster di densità superiore ad $1 - q$.

UN CLUSTER DI DENSITÀ p É UN INSIEME DI NODI TALE PER CUI OGNI NODO NELL'INSIEME HA ALMENO UNA FRAZIONE p DI NODI VICINI NELL'INSIEME.

Dimostrazione: Dimostriamo che, dato un threshold q e dato un set di nodi adottatori iniziali di A , **se la restante rete contiene un cluster di**

densità superiore a $1 - q$, allora il set di nodi adottatori iniziali non causerà una cascade completa.

Data una rete arbitraria in cui il comportamento di A si diffonde con un threshold q , a partire da un set di nodi adottatori iniziali, supposto che la rete restante contenga un cluster di densità superiore ad $1 - q$, diremo che nessun nodo nel cluster adotterà A.

Dimostrazione per assurdo:

Consideriamo che qualche nodo nel cluster adotti A.

Sia v il nodo che adotta A al tempo t .

Nel momento in cui v adotta A, la sua decisione si basa sul numero di nodi vicini che ha adottato A nello step precedente, al tempo $t - 1$.

Per come abbiamo scelto v , nessun nodo nel cluster ha scelto di adottare A prima di v , l'unico nodo vicino di v che abbia scelto di adottare A prima di v è all'esterno del cluster. Ma poichè il cluster ha una densità superiore a $1 - q$, allora la frazione di nodi vicini di v nel cluster è superiore a $1 - q$ e quindi la frazione di nodi esterni al cluster e vicini di v è minore di q . Poichè questi sono gli unici vicini che hanno potuto adottare A prima di v e poichè il threshold era q , si cade in contraddizione.

Quindi, l'assunzione originale che qualche nodo nel cluster adotti A, ad un certo tempo t , è falsa, per cui nessun nodo nel cluster adotterà A e quindi è dimostrato che il set di nodi adottatori iniziali di A non causerà una complete cascade.

Dimostrazione (2): Qualora un set di adottatori iniziali fallisca nel causare una cascata completa con un threshold q , ci sarà un cluster nella restante rete di densità superiore a $1 - q$.

Si dimostra facilmente poichè nessun nodo nel cluster vorrà switchare ad A.

Siano S i nodi adottatori di B alla fine del processo di switch ad A. Vogliamo dimostrare che S è un cluster di densità superiore ad $1 - q$ che completa la dimostrazione.

Sia $W \in S$. Se w non vuole passare ad A, vuol dire che il set di adottatori di A vicini a w è minore di q e quindi che la frazione dei suoi vicini adottatori di B è maggiore di $1 - q$. Ma gli unici nodi nella rete che adottano B appartengono a S , quindi la frazione di nodi vicini di w che appartengono ad S è superiore a $1 - q$. Poichè questo vale per ogni nodo in S , ne segue che S è un cluster di densità superiore a $1 - q$.

Diffusion, threshold and role of weak ties. C'è una forte differenza tra **entrare a contatto/conoscere una nuova idea** e decidere di *adottarla effettivamente*.

Uno studio su ciò è stato condotto rispetto alla diffusione dell'utilizzo di semi di mais modificati. Dallo studio si è osservato come l'entrata a conoscenza dell'innovazione ha preceduto significativamente la sua adozione. Inoltre, c'è una connessione tra la diffusione di un'innovazione e i weak tie di una rete.

In genere, in una rete le connessioni weak sono quei legami che spesso sono local bridge della rete ed essendo tali, forniscono l'accesso a informazioni che risiedono in altre parti della rete che altrimenti risulterebbero inaccessibili. Quindi permettono la diffusione della consapevolezza di una nuova idea, che è diverso dal concetto di diffusione dell'adozione dell'idea che dipende dal threshold.

Bridge e local bridge di una rete permettono la diffusione della consapevolezza di una nuova idea tra i nodi della rete, ma sono più deboli nel **trasmettere l'adozione** del nuovo comportamento, quanto più è alta il threshold da superare per l'adozione della nuova idea.

I local bridge permettono la diffusione dell'informazione tra cricche, ma l'adozione interviene solo se esiste un legame forte con il vicino. Ci vuole fiducia nel vicino per adottarne il comportamento.

Osservazione: Anche rispetto alle epidemie c'è una forte differenza: in queste fare la stessa cosa significava essere infettati. In questo caso, fare la stessa cose del proprio vicino ha dei costi: c'è un fattore di rischio per cui non agiamo subito.

Adottare un nuovo comportamento non è una cosa banale. Si osserva prima cosa fanno le persone vicine perchè è l'euristica migliore per capire.

Quando si tratta di fare scelte importanti, serve la pressione del proprio vicino.

Extensions of the Basic Cascade Model. La nostra discussione finora ha dimostrato come un modello molto semplice di cascata nelle reti può acquisire una serie di osservazioni qualitative. Ora consideriamo come il modello può essere esteso e arricchito.

Soglia Eterogenea. Fino adesso ogni individuo ha avuto stessi profitti e stessa intensità di relazione con i vicini. Supponiamo ora che ogni persona

nel social network valuti i comportamenti A e B in modo diverso. Quindi, per ogni nodo v , definiamo un payoff Av - etichettato in modo che sia specifico per v - che riceve quando coordina con qualcuno sul comportamento A, e definiamo un payoff Bv che riceve quando coordina con qualcuno sul comportamento B. Quando due nodi v e w interagiscono attraverso un bordo della rete, stanno quindi giocando ad un coordination game (nella figura sottostante).

		w	
		A	B
v	A	a_v, a_w	$0, 0$
	B	$0, 0$	b_v, b_w

Figure 19.12: *A-B* Coordination Game

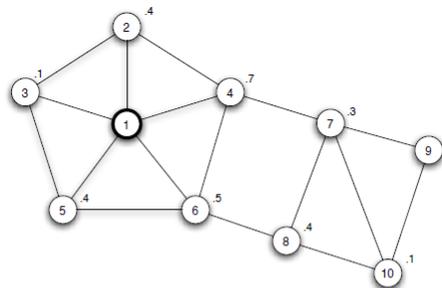
Quando abbiamo definito per la prima volta questo tipo di gioco, con tutti i nodi che concordano su come valutare A e B, ci siamo chiesti come un dato nodo v dovrebbe scegliere il suo comportamento in base a ciò che stanno facendo i suoi vicini. Una domanda simile si applica qui, portando ad un calcolo simile. Se v ha d vicini di casa, di cui una frazione p ha un comportamento A e una frazione $(1 - p)$ ha un comportamento B, quindi il payoff dalla scelta di A è $pdAv$ mentre il il pagamento dalla scelta di B è $(1 - p)dBv$. Quindi A è la scelta migliore se

$$p \geq \frac{b_v}{a_v + b_v}$$

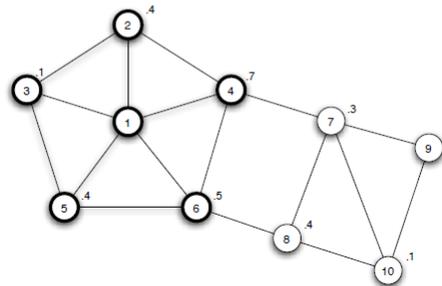
Usando q_v per indicare il lato destro, abbiamo di nuovo una regola di decisione molto semplice. Ogni nodo v ha la propria soglia personale q_v , e sceglie A se almeno una frazione q_v dei suoi vicini lo hanno fatto. Inoltre la variazione in questo insieme di nodi eterogenei ha un significato intuitivo in termini di variazione dei payoff: se un nodo vale A ed è più alto rispetto a B, la sua soglia q_v è inferiore. Il processo ora viene eseguito come prima, a partire da una serie di utenti iniziali, con ciascun nodo che valuta la propria decisione in base alla propria soglia in ciascuna fase temporale. Un certo numero di interessanti osservazioni generali sono suggerite da ciò che accade in figura 19.13. Innanzitutto, la diversità nelle soglie dei nodi gioca chiaramente un ruolo importante che interagisce in modi complessi con la struttura della

rete. Ad esempio, nonostante il nodo 1 Posizione "centrale", non sarebbe riuscito a convertire nessuno a A se non lo fosse per la soglia estremamente bassa sul nodo 3. Questo è strettamente correlato a un punto di lavoro di Watts and Dodds [409], che sostengono che per comprendere la diffusione dei comportamenti nelle reti sociali, dobbiamo prendere in considerazione non solo il potere dei nodi influenti, ma anche la misura in cui questi nodi influenti hanno accesso a persone facilmente influenzabili.

È anche istruttivo osservare come la diffusione di A si fermi in Figura 19.13, e per chiedere se la nozione di cluster come ostacoli per le cascate può essere estesa per mantenere pari nel caso in cui le soglie siano eterogenee. In effetti, questo è possibile, formulando la nozione di un cluster in questa impostazione come segue. Dato un insieme di soglie di nodi, diciamo che il blocco del cluster nella rete è un insieme di nodi per cui ogni nodo v ha più di $1-q_v$ frazione dei suoi amici anche nel set. Si può dimostrare che un insieme di adottanti iniziali causerà una cascata completa - con un determinato insieme di soglie di nodo - se e solo se la rete rimanente non contiene un cluster di blocco.



(a) One node is the initial adopter



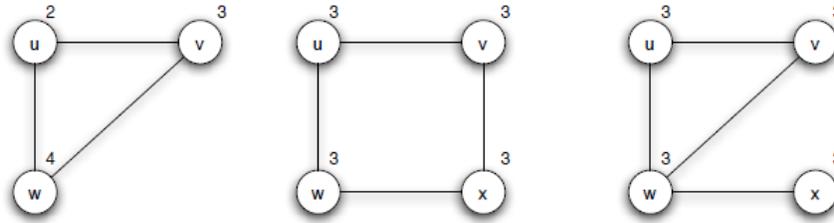
(b) The process ends after four steps

Conoscenza, Soglie e Azione Collettiva. Passiamo ora alla discussione su un argomento correlato che integra gli effetti di rete in entrambi i casi di livello di popolazione e livello di rete locale. Consideriamo le situazioni in cui il coordinamento attraverso un ampio segmento della popolazione è importante, e il social network di base serve per trasmettere informazioni sulla disponibilità delle persone a partecipare.

Azione collettiva e ignoranza pluralistica. Un utile esempio motivante è il problema di organizzare una rivolta. Immagina di vivere in una simile società e sei consapevole di una manifestazione pubblica contro il governo che è in programma per domani. Se viene visualizzato da un numero enorme di persone, allora il governo sarà seriamente indebolito, e tutti nella società - inclusi i dimostranti - ne trarranno beneficio. Ma se si presentano solo poche centinaia, i dimostranti saranno semplicemente tutti arrestati (o peggio), e sarebbe stato meglio se tutti fossero rimasti casa. **In tali circostanze, cosa dovresti fare?** Questo è un esempio di un problema di azione collettiva, in cui un'attività produce benefici solo se un numero sufficiente di persone partecipa. L'impostazione più cruda dell'esempio evidenzia alcuni punti. Nel caso di un apparecchio fax, è possibile leggere recensioni e pubblicità; puoi fare sondaggi a vasta gamma di amici e colleghi per vedere cosa hanno intenzione di fare. A causa dei payoff negativi associati all'opposizione a un governo repressivo, molte di queste opzioni sono infattibili: puoi parlare dell'idea con un piccolo numero di amici intimi di cui ti fidi, ma oltre a questo la tua decisione è resa difficile dalla mancanza di conoscenza della volontà altrui di partecipare.

Queste considerazioni illustrano alcuni dei motivi per cui i governi repressivi limitano la comunicazione tra i loro cittadini. È possibile, per esempio, che un grande frazione della popolazione sia abbastanza forte nella sua opposizione da essere disposto a prendere misure estreme, ma che la maggior parte di queste persone credono di essere in una piccola minoranza, e quindi non fanno nulla. In questo modo, un governo potrebbe sopravvivere molto tempo. Questo fenomeno è noto come **ignoranza pluralistica**, in cui le persone hanno stime errate sulla prevalenza di determinate opinioni nella popolazione. È un principio che si applica ampiamente, non solo nelle impostazioni in cui l'autorità centrale lavora per limitare le informazioni.

Un modello per l'effetto della conoscenza sull'azione collettiva. Consideriamo come la struttura del social network può influenzare il modo



(a) *An uprising will not occur* (b) *An uprising will not occur* (c) *An uprising can occur*

in cui le persone prendono decisioni di azione collettiva. Supponiamo che ogni persona in un social network sia a conoscenza di una potenziale imminente protesta contro il governo, e lei ha una soglia personale che codifica la sua volontà di partecipare. Una soglia di k significa "Mi presenterò per la protesta se io sono sicuro che almeno k persone in totale (incluso me stesso) si presenteranno". I collegamenti nel social network codificano forti legami, in cui i due endpoint di ciascun collegamento indica la fiducia di uno per l'altro. Pertanto, assumiamo che ogni persona nella rete conosca le soglie di tutti i suoi vicini nella rete, ma - a causa della natura rischiosa della comunicazione - non conosce le soglie di qualcun altro. Ora, data una rete con una serie di soglie, come dovremmo ragionare su cosa potrebbe accadere?

Supponiamo che ogni nodo rappresenti uno dei vicepresidenti senior di un'azienda, ognuno dei quali deve decidere se confrontarsi attivamente con l'amministratore delegato impopolare il giorno successivo alla riunione del consiglio di amministrazione. Sarebbe disastroso farlo senza il supporto ragionevole degli altri, quindi ognuno è disposto a confrontarsi con l'amministratore delegato a condizione che almeno un certo numero di essi lo faccia. Supponiamo inoltre che ogni nodo sappia come si presenta il social network.

Conoscenza comune e istituzioni sociali. Basandosi su questi modelli, Chwe e altri hanno sostenuto che un'ampia gamma di istituzioni sociali di fatto svolge il ruolo di aiutare le persone a raggiungere una conoscenza comune. Un discorso ampiamente pubblicizzato, o un articolo in un alto circolo giornale, ha l'effetto non solo di trasmettere un messaggio, ma di far sì che gli ascoltatori o i lettori si rendano conto che anche molti altri hanno ricevuto il messaggio. Questo è un contesto utile per pensare alla libertà di stampa e alla libertà di riunione, e il loro rapporto con le società aperte. Ma istituzioni relativamente lontane dal politico la sfera può anche avere ruoli

forti come generatori di conoscenza comune. Ad esempio, Chwe sostiene che gli spot pubblicitari di Super Bowl sono spesso usati per pubblicizzare prodotti dove ci sono forti effetti di rete - cose come piani di telefoni cellulari e altri beni da vendere. Ad esempio, l'Apple Macintosh è stato introdotto in uno spot durante il Super Bowl del 1984. ("il più grande spot televisivo di tutti i tempi"). Come scrive Chwe dell'evento, "Il Macintosh era completamente incompatibile con i personal computer esistenti: gli utenti Macintosh potrebbero facilmente scambiare dati solo con altri utenti Macintosh, e se poche persone comprassero il Macintosh, ci sarebbe poco software disponibile. Quindi un potenziale acquirente sarebbe più propenso ad acquistare se altri lo comprassero anche loro; il gruppo di potenziali acquirenti di Macintosh ha affrontato un problema di coordinamento. In onda la pubblicità durante il Super Bowl, Apple non ha semplicemente informato ogni spettatore del Macintosh; Apple ha anche dichiarato a ogni spettatore che molti altri spettatori sono stati informati del Macintosh.

La capacità in cascata Se torniamo al modello di base di questo capitolo, in cui i nodi scelgono tra i comportamenti A e B basati su soglie derivate da un gioco di coordinamento in rete, un interessante prospettiva è capire in che modo le diverse strutture di rete sono più o meno ospitali. Una prima versione è quella dove abbiamo mostrato i cluster nella struttura di rete costituiscono gli ostacoli naturali alle cascate. Qui prendiamo un approccio diverso; data una rete, chiediamo: qual è la soglia più grande a cui nessun "piccolo" insieme di utenti iniziali può causare una cascata completa? Questa soglia massima è quindi una proprietà intrinseca della rete, che indica il limite esterno alla sua capacità di supportare cascate; ci riferiremo ad esso come la capacità a cascata della rete.

Cascades su Networks Infinite Ora descriviamo il modello in generale. Il social network sarà modellato come un grafico connesso su un insieme infinito di nodi; sebbene il set di nodi sia infinito, ogni singolo nodo è connesso solo a un numero finito di altri nodi (per cui il numero infinito di nodi non pone alcun problema), sulle cui decisioni baserà il proprio comportamento. Per essere concreti, inizialmente, un insieme finito di nodi S ha un comportamento A (questo è il piccolo insieme di primi adottanti), e tutti gli altri nodi adottano B. Il tempo quindi scorre avanti nei passi $t = 1, 2, 3, \dots$

In ogni fase t , ogni nodo diverso da quelli in S usa la regola decisionale con soglia q per decidere se adottare il comportamento A o B. Infine, diciamo

che l'insieme S causa una cascata completa se, partendo da S come i primi utilizzatori di A , ogni nodo della rete alla fine passa permanentemente ad A . (Dato il fatto che il set di nodi è infinito, dobbiamo fare attenzione a essere chiari su cosa significhi: per ogni nodo v , c'è un po' di tempo dopo il quale v usa sempre il comportamento A .)

La definizione chiave è ora la seguente. Diciamo che la capacità della cascata della rete è il più grande valore della soglia q per la quale un insieme finito di utenti possono causare una cascata completa. Per illustrare questa definizione, consideriamo due semplici esempi: abbiamo una rete costituita da un percorso che si estende all'infinito in entrambe le direzioni. Supponiamo che i due nodi ombreggiati siano i primi ad adottare A e che tutti gli altri nodi iniziano ad adottare B . Cosa accadrà? Non è difficile da controllare se $q \leq 1/2$, quindi i nodi u e v passeranno ad A , dopo di che i nodi w e x cambieranno, e questo switch si propagherà lungo il percorso: per ogni nodo, arriverà il momento in cui sceglierà di passare permanentemente ad A . Quindi la capacità a cascata del percorso infinito è almeno $1/2$, dal momento che abbiamo appena visto un insieme limitato di utenti iniziali che causa una cascata completa. **In effetti, $1/2$ è il valore esatto della capacità in cascata di un percorso infinito:** con $q > 1/2$, nessun insieme finito di utenti iniziali può ottenere qualsiasi nodo alla sua destra per passare ad A , quindi A chiaramente non può diffondersi su tutti i nodi. Un secondo semplice esempio, una rete costituita da una griglia infinita in che ciascun nodo è connesso ai suoi otto vicini più vicini. Supponiamo che i nove siano ombreggiati i nodi sono i primi ad adottare A e tutti gli altri nodi iniziano ad adottare B . Il comportamento A si spinge gradualmente verso il vicini dei nodi ombreggiati, fino a quando ogni nodo nella griglia è alla fine convertito in A). Possiamo verificare che in effetti $3/8$ è la capacità a cascata dell'infinito griglia.

Si noti che la capacità in cascata è una proprietà intrinseca della rete stessa. Una rete con una grande capacità a cascata è quella in cui le cascate si verificano più "facilmente", in altre parole, si verificano anche per i comportamenti A che non offrono molti vantaggi rispetto al comportamento B . Visto nel senso della società, l'esempio della griglia può essere vista come una sorta di fallimento sociale: Il fatto che la capacità a cascata sulla griglia è $3/8$ significa che quando q è strettamente tra $3/8$ e $1/2$ A è la tecnologia migliore, ma la struttura della rete rende B così fortemente radicata che nessuna serie finita di utenti iniziali di A può portare A a vincere.

Consideriamo ora la seguente domanda fondamentale: **quanto grande può essere la cascata di una rete capacità essere?** Il percorso infinito mostra che ci sono reti in cui la capacità a cascata può essere grande quanto $1/2$: questo significa che un nuovo comportamento A può spostare un comportamento esistente B anche quando i due conferiscono benefici sostanzialmente equivalenti. **Esiste una rete con una capacità a cascata più elevata?** Questo sarebbe un po' sorprendente, dal momento che una tale rete avrebbe la proprietà che una tecnologia inferiore può sostituire quella superiore, anche quando la tecnologia inferiore inizia solo con una piccola serie di adottanti iniziali. In effetti, mostreremo che nessuna rete ha una capacità in cascata maggiore di $1/2$, anche se la cascata si propaga più lentamente rispetto ad una griglia.

Quanto può essere grande la capacità in cascata? Non esiste una rete in cui la capacità della cascata superi $1/2$. Anche se un nodo ha bisogno del 51 per cento dei suoi vicini per cambiare, la cascata si propaga costantemente, causando, alla fine, il cambiamento di tutti. Quello che dobbiamo davvero mostrare è il seguente: se $q > 1/2$ un nuovo comportamento che inizia con un insieme finito di nodi non lo farà diffondere su ogni altro nodo.

Affronteremo questa domanda rintracciando la "interfaccia" dove gli adottanti di A sono legati agli adottanti di B. A un livello molto alto, stiamo andando per mostrare che mentre il processo è in esecuzione, questa interfaccia diventa più stretta e più stretta, alla fine restringendosi al punto in cui il processo deve fermarsi, non avendo raggiunto tutti i nodi. Più precisamente, supponiamo che il comportamento A si diffonda da un insieme iniziale finito S con soglia $q > 1/2$. Mentre il tempo avanza nei passi $t = 1, 2, 3, \dots$, sempre più nodi passano ad A. In ogni momento, ogni confine della rete può essere descritto come un lato A-A (che collega due utenti di A), un lato B-B (che collega due utenti di B), o un arco A-B (che collega un utente di A ad un utente di B). Definiamo l'interfaccia per essere l'insieme dei bordi A-B. Quello che mostreremo è che, in ogni fase, la dimensione del numero di spigoli che contiene (nodi che seguono A) deve diminuire rigorosamente. Questo sarà sufficiente per mostrare ciò che noi bisogno, per il seguente motivo: poiché vi è un insieme finito di adottanti iniziali S , e dal momento che ognuno di questi ha un insieme finito di vicini, l'insieme dei bordi A-B è finito e ha una dimensione pari a quella iniziale dell'interfaccia. Dopo che alcuni nodi adottano A, la dimensione dell'interfaccia diminuisce. In generale, la dimensione dell'interfaccia diminuisce strettamente con ogni passo del processo quando $q > 1/2$, con al massimo x passi, dove x è la dimensione iniziale

dell'interfaccia.

Quindi, la dimensione dell'interfaccia diminuisce in ogni passaggio. Ma che cosa succede in una fase del processo? Alcuni nodi che sono attualmente adottanti di B scoprono, per la prima volta, che almeno una frazione dei loro vicini sono ora adottivi di A, e così anche loro passano a A. Questo fa sì che l'interfaccia cambi nel modo seguente. Quando un nodo w passa da B a A, i suoi nodi vicini che rimangono con B **cambiano arco** da B-B a A-B, quindi questo li induce a unirsi all'interfaccia.

Considerazioni finali. Abbiamo dimostrato che quando $q > 1/2$, nessun insieme finito di nodi può causare una cascata completa, in qualsiasi rete. In termini di una storia basata sulla scelta degli utenti tra le tecnologie A e B, la situazione in cui $q > 1/2$ corrisponde intuitivamente al caso in cui la nuova tecnologia A è in effetti peggiore, quindi passerai ad A solo nei casi in cui la maggior parte dei tuoi vicini lo ha fatto. Quindi una tecnologia peggiore non sostituirà una tecnologia migliore già ampiamente utilizzata. (Tuttavia, nelle reti dove la capacità della cascata è strettamente inferiore a $1/2$, è possibile che sia una tecnologia migliore incapace di sostituire una peggiore che è già ampiamente diffusa). È anche interessante riflettere sul modo in cui abbiamo sostenuto che A non può diffondersi in tutti i nodi quando $q > 1/2$; c'è un parallelo metodologico qui alla nostra discussione sui mercati: Anche lì abbiamo avuto un processo in cui la procedura di asta bipartita che ha aggiornato i prezzi deve fermarsi. Mancando qualsiasi misura ovvia di progresso sul processo, abbiamo inventato una sorta di "energia potenziale" che è costantemente prosciugata dal processo, terminando quando finisce. Abbiamo usato una strategia molto simile qui, con la dimensione dell'interfaccia che funge da potenziale funzione energetica che diminuisce costantemente fino a quando il processo non si ferma.

14 [20] The small world phenomenon or the Six Degree of Separation

Nel capitolo precedente abbiamo considerato in che modo i social network possono fungere da conduttori di idee e innovazioni attraverso gruppi di persone. Per sviluppare questa idea più pienamente, lo colleghiamo ad un altro problema strutturale di base: il fatto che questi gruppi possono essere collegati da percorsi molto brevi attraverso il social network. Quando le persone cercano di utilizzare questi percorsi brevi per raggiungere altri che sono socialmente distanti, si stanno impegnando in una sorta di **ricerca mirata**. Questo è molto più specifico rispetto all'ampio modello di diffusione mostrato precedentemente. Comprendere la relazione tra ricerca mirata e la diffusione ad ampio raggio è importante per pensare più in generale al modo in cui le cose fluiscono attraverso i social network.

Lo **small world phenomenon**, anche chiamato **six degrees of separation**, è il fenomeno per cui le social network reali sono ricche di cammini brevi tra nodi (per cui è una caratteristica strutturale della rete).

Il primo esperimento empirico svolto sullo small world phenomenon è stato quello di Milgra, in cui, scelti a caso degli individui da cui far partire l'esperimento, ha chiesto loro di spedire una lettera ad una persona target residente a Boston, di cui sono state date alcune informazioni. E' stato chiesto di farlo non spedendo la lettera direttamente al destinatario, ma inviandola ad un unico conoscente e partecipante che si ritiene possa conoscere la persona target o che faccia continuare il gioco secondo la stessa regola.

Un terzo delle lettere è arrivato a destinazione in un numero medio di step pari a 6, da qui il nome alternativo del fenomeno. Questo esperimento ha dimostrato empiricamente l'esistenza di cammini brevi nella rete sociale globale di conoscenze.

Dall'esperimento di Milgram inoltre sono scaturite due conclusioni fondamentali sulle reti sociali:

1. **1.** I cammini brevi sono in abbondanza;
2. **2.** Le persone senza una conoscenza globale della rete e della sua mappa, collettivamente riescono a raggiungere il target, trovando i cammini brevi che li collegano al target.

E' possibile definire un modello che giustifichi l'esistenza dei cammini brevi e il fatto che sia possibile trovarli. Cominciamo considerando una rete

in cui ogni persona conosce 100 persone della rete. Visitando la rete dal punto di vista di un singolo nodo, quello che possiamo osservare è che se la rete è una rete sociale reale, quello che si genera dalla visita non è un albero poichè i nodi di un livello non sono collegati solo al nodo genitore o ai nodi figli, ma anche ai nodi fratelli, cioè i nodi dello stesso livello. Questo è dovuto all'abbondanza di triadi e closure esistenti nella rete (insieme di tre persone che si conoscono tra loro).

Da qui si deduce che il numero di persone che è possibile raggiungere dal nodo radice ad un certo livello, è molto inferiore rispetto a quello che sarebbe potuto essere senza la triade classica, ossia se ogni individuo fosse collegato sempre a 100 nuovi nodi.

La triade closure nelle reti sociali limita il numero di persone che il nodo radice può raggiungere in due step successivi.

The Watts-Strogatz model. Il modello definito da Watts e Strogatz è un modello di rete in cui sono presenti **molti triade closure e molti cammini brevi**, come abbiamo discusso sopra. Un tale modello è generabile considerando la combinazione di due concetti fondamentali delle reti sociali: l'**omophily** e i **weak ties**.

L'omophily interviene nella creazione delle triadic closure, mentre i weak ties permettono l'esistenza di cammini brevi nella rete.

Watts e Strogatz hanno poi definito un modello che genera casualmente una rete che rispetti la presenza di molte chiusure triangolari e molti cammini liberi:

DA LIBRO LABORATORIO: il Watts-Strogatz graph approssima bene una rete sociale del mondo reale (il modello non crea comunità strettamente connesse quindi non riproduce una rete sociale reale realistica).

Il modello dispone a ring gli N nodi della rete e ne collega ognuno a K altri nodi vicini. A questo punto, ridefinisce alcuni archi modificandone il nodo target con una probabilità p o in maniera random. La probabilità che un arco sia ridefinito è p .

Di solito il nuovo target non è un vicino ma uno geograficamente lontano per cui l'arco passa per il centro del ring.

Questo modello ricrea l'illusione dello small world dove nodi geograficamente remoti sono connessi da cammini liberi e riproduce l'effetto della six degrees of separation.

The powerfull of collective search. Uno degli aspetti interessanti osservati con l'esperimento di Milgram è stata la capacità dei partecipanti di raggiungere il nodo target, pur non conoscendo la struttura complessiva della rete.

Proprio il successo dell'esperimento ha generato interesse rispetto a:

- Potenza della ricerca collettiva.
- Possibilità di generare una rete random in cui la ricerca decentralizzata abbia successo
- Caratteristiche che la rete deve avere per garantire questo successo.

Inoltre, dall'esperimento è stato osservato che non solo la rete aveva una sorta di gradiente o informazione nascosta che ha aiutato i partecipanti a scegliere dove spedire la lettera, ma anche che in generale nei vari cammini che si sono formati per ogni lettera distinta che ha raggiunto il target, ogni volta che un nuovo partecipante spediva la lettera c'era un progressivo avvicinamento verso il target.

La rete random capace di riprodurre il successo di questa ricerca decentralizzata non solo avrebbe dovuto essere caratterizzata da un altro clustering coefficient (quindi molte triadi closure) e molti cammini liberi, ma non doveva tralasciare il fatto che le persone nella rete reale abbiano collaborato nella ricerca del cammino più breve per raggiungere l'individuo target.

Modellare il processo di ricerca decentralizzata. Sebbene il modello Watts-Strogatz non fornisca una struttura in cui la ricerca decentralizzata può essere eseguita in modo efficace, una lieve generalizzazione del modello esibisce infatti entrambe le proprietà vogliamo: le reti contengono percorsi brevi e questi percorsi brevi possono essere trovati usando ricerca decentralizzata.

Generalizzazione del modello di rete. Adattiamo il modello introducendo una quantità aggiuntiva che controlla le "scale" estese da legami deboli a lungo raggio. Abbiamo nodi su una griglia ma ora, ognuno dei suoi k archi casuali è generato in un modo che decade con la distanza, controllato da un clustering coefficient q come segue. Per due nodi v e w , $d(v, w)$ denota il numero di passi nella griglia tra di loro. Nel generare un arco casuale da v , abbiamo questo collegamento a w con probabilità proporzionale di $d(v, w)^{-q}$.

Quindi, in effetti, abbiamo un modello diverso per ogni valore di q . Il modello originale basato sulla griglia corrisponde a $q = 0$, quindi i collegamenti sono scelti in modo uniforme, casualmente; Variare q è come girare una manopola che controlla quanto sono uniformi i collegamenti casuali. In particolare, quando q è molto piccolo, i collegamenti a lungo raggio sono "troppo casuali" e non possono essere usati efficacemente per ricerca decentralizzata; quando q è grande, i collegamenti a lungo raggio sono "non abbastanza casuali", poiché semplicemente non forniscono abbastanza dati per i salti a lunga distanza, necessari per creare uno small world.

C'è un ottimo punto operativo per la rete, dove la distribuzione dei collegamenti a lungo raggio è sufficiente equilibrato tra questi estremi per consentire una rapida ricerca decentralizzata? Sì. Il risultato principale di questo modello è che, nel limite della grande rete dimensione, la ricerca decentralizzata è più efficiente quando $q = 2$ (in modo che i collegamenti casuali seguano a distribuzione quadratica).

In linea con la natura del risultato, che vale solo come limite della dimensione della rete va all'infinito - la ricerca decentralizzata ha circa la stessa efficienza sulle reti di questa dimensione tra tutti gli esponenti q tra 1.5 e 2.0. Ma in generale con l'aumentare della dimensione della rete, le migliori prestazioni si verificano con esponenti q sempre più vicini a 2.

Un calcolo approssimativo che motiva la rete inversa. Ma perchè l'esponente $q = 2$ rende migliore la ricerca decentralizzata? Nella Sezione 20.7 alla fine di questo capitolo, descriviamo una dimostrazione che la ricerca decentralizzata è efficiente quando $q = 2$. Ma anche senza i dettagli completi, c'è un breve calcolo che suggerisce perché il numero 2 è importante. Descriviamo questo ora.

Nel mondo reale in cui è stato condotto l'esperimento di Milgram, organizziamo mentalmente distanze in "scale di risoluzione" diverse. Un modo ragionevole di pensare su queste scale di risoluzione in un modello di rete - dal punto di vista di un particolare nodo v - è considerare i gruppi di tutti i nodi a distanze sempre maggiori da v : nodi a distanza 2-4, 4-8, 8-16 e così via.

Quindi ora vediamo come l'esponente del quadrato inverso $q = 2$ interagisce con queste scale di risoluzione. Possiamo lavorare concretamente con una singola scala prendendo un nodo v nella rete, e una distanza fissa d , e considerando il gruppo di nodi che giace a distanze tra d e $2d$ da v , come mostrato nella Figura 20.7.

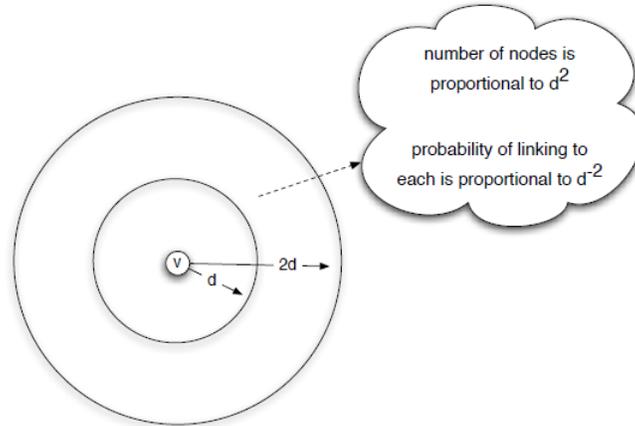


Figure 20.7: The concentric scales of resolution around a particular node.

Ora, qual è la probabilità che v formi un collegamento con un nodo all'interno di questo gruppo? Il numero totale di nodi in questo gruppo è proporzionale a d^2 . D'altra parte, la probabilità che v si colleghi a qualsiasi nodo del gruppo varia a seconda di quanto esattamente è lontano, ma ogni probabilità individuale è proporzionale a d^{-2} . Questo suggerisce un modo qualitativo di pensare alla rete che sorge quando $q = 2$: i legami deboli a lungo raggio si stanno formando in un modo che si sviluppano in modo uniforme tutte le diverse scale di risoluzione. Ciò consente alle persone di inoltrare il messaggio in modo coerente trovando modi per ridurre la loro distanza dal bersaglio, non importa quanto vicino o lontano siano da esso. Questo non è diverso da come un servizio postale utilizza l'indirizzo su una busta per consegnare un messaggio: un tipico indirizzo postale specifica esattamente le scale di risoluzione, incluso il paese, lo stato, la città, la strada e infine il numero civico. Ma il punto è che il postale il sistema è progettato centralmente e mantenuto a costi considerevoli per eseguire esattamente questo lavoro, mentre i nostri modelli guidano i messaggi attraverso la rete sorgono spontaneamente da uno schema di collegamenti completamente casuale.

Analisi empirica e modelli generalizzati. I risultati che abbiamo visto finora hanno sollevato un certo numero di questioni qualitative che si possono provare con dati provenienti da veri social network. In questa sezione discutiamo di studi empirici che analizzano i dati geografici per cercare prove



Figure 20.8: The population density of the LiveJournal network studied by Liben-Nowell et al. (Image from [277].)

dell'esponente $q = 2$, così come le versioni più generali di questi modelli che incorporano nozioni non geografiche di distanza sociale.

Dati geografici sull'amicizia. Negli ultimi anni, i dati disponibili su social i siti di networking hanno reso molto più facile ottenere dati su larga scala che forniscano informazioni su come l'amicizia si lega alla distanza. Il sito di blog LiveJournal ha fornito dati, analizzando 500.000 utenti che hanno fornito un sistema statunitense. LiveJournal serve qui principalmente come un "sistema modello" molto utile, contenente dati sulla base geografica dei collegamenti di amicizia (difficilmente raggiungibile senza social network). Da un punto di vista metodologico, è una questione interessante e abbastanza irrisolta per capire quanto la struttura delle amicizie definita nelle comunità on-line corrisponde alla struttura delle amicizie offline. Per allineare i dati di LiveJournal con modello di griglia di base bisogna tenere conto che la densità di popolazione degli utenti è estremamente non uniforme. Vedere la Figura 20.8 per una visualizzazione della densità di popolazione nei dati di LiveJournal. In particolare, la distribuzione inversa quadrata è utile per trovare gli obiettivi quando i nodi sono uniformemente distanziati. **Ma qual è una generalizzazione ragionevole al caso in cui possono essere diffuse molto non uniforme?**

Amicizia basata sul grado. Un approccio che funziona bene è determinare le probabilità di collegamento non per distanza fisica, ma per grado. Supponiamo che come nodo v guardi tutto il resto dei nodi, classificandoli per vicinanza: il grado di un nodo w , indicato come $\text{rank}(w)$, è uguale al numero di altri nodi più vicini a v rispetto a w . Supponiamo ora che per alcuni esponenti p , il nodo v crei un collegamento casuale come segue: esso

sceglie un nodo w come l'altra estremità con probabilità proporzionale a $\text{rank}(w)^{-p}$. Chiameremo questa amicizia basata sul rango con esponente p . Quale scelta dell'esponente p generalizza la distribuzione del quadrato inverso per uno spazio uniforme i nodi? Se un nodo w in una griglia uniforme è a distanza d da v , quindi giace sulla circonferenza di un disco di raggio d , che contiene circa d^2 più vicini nodi - quindi il suo grado è approssimativamente d^2 . Quindi, collegando a w con probabilità proporzionale a d^{-2} è approssimativamente lo stesso del collegamento con il grado di probabilità $(w)^{-1}$, quindi questo suggerisce quell'esponente $p = 1$ è la giusta generalizzazione della distribuzione del quadrato inverso. Infatti, si dimostra che essenzialmente per qualsiasi densità di popolazione, se i collegamenti casuali sono costruiti usando l'amicizia basata sul rango con l'esponente 1, la rete risultante consente una ricerca decentralizzata efficiente con alta probabilità. Oltre a generalizzare il risultato inverso-quadrato per la griglia, questo risultato ha un buon riassunto qualitativo: costruendo una rete che è ricercabile in modo efficiente, si crea un collegamento a ciascun nodo con probabilità inversamente proporzionale al numero di nodi più vicini.

Ora si può tornare a LiveJournal e vedere come si adatta bene l'amicizia basata sul rango distribuzione di link effettivi di social network: consideriamo coppie di nodi a cui uno assegna all'altro un rango di r , e chiediamo quale frazione di queste coppie sono in realtà amici, come a funzione di r . Questa frazione diminuisce approssimativamente come r^{-1} ? Dal momento che stiamo cercando una relazione tra rango e frazione, possiamo procedere così: invece di tracciare f come funzione di r , possiamo tracciare f come funzione di $\log r$, vedere se troviamo una linea approssimativamente diretta e stimare l'esponente p come la pendenza di questa linea. La Figura 20.10 (a) mostra questo risultato per i dati di LiveJournal; vediamo che gran parte del corpo della curva è approssimativamente una linea retta inserita tra i pendii di -1.15 e -1.2, e quindi vicino all'esponente ottimale di -1. È anche interessante lavorare separatamente con i sottoinsiemi strutturalmente più omogenei dei dati costituiti da utenti della costa occidentale e Utenti della costa orientale, e quando lo si fa l'esponente diventa molto vicino all'ottimale valore di -1. La Figura 20.10 (b) mostra questo risultato: la linea tratteggiata inferiore è ciò che dovresti vedere se i punti seguissero il rank di distribuzione-1, e la linea tratteggiata superiore è ciò che vedi se i punti seguissero il rank di distribuzione-1.05. La vicinanza del rankbased su reti reali al valore ottimale di -1 è stato anche confermato da ricerca successiva. I diagrammi in Figura 20.10 sono quindi la conclusione di una sequenza difasi in cui partiamo da un

esperimento (Milgram), si costruiscono modelli matematici basati su questo esperimento (combinando collegamenti locali e a lungo raggio), fai una previsione basata sul modelli e si convalida convalidare questa previsione su dati reali (da LiveJournal e Facebook).

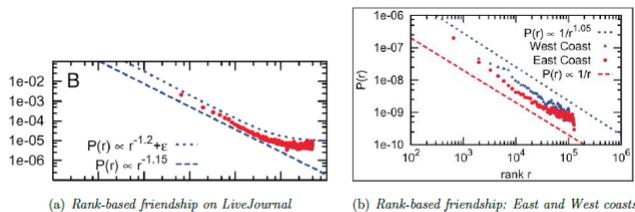


Figure 20.10: The probability of a friendship as a function of geographic rank on the blogging site LiveJournal. (Image from [277].)

Social Foci and Social Distance. Quando abbiamo discusso per la prima volta il modello Watts-Strogatz, abbiamo notato che la griglia dei nodi doveva servire come nozione di somiglianza tra individui. Chiaramente è più facilmente identificabile con la vicinanza geografica, ma i modelli successivi hanno esplorato altri tipi di somiglianza e i modi in cui essa può produrre effetti di piccolo mondo nelle reti.

La nozione di punti focali sociali dal capitolo 4 fornisce un modo flessibile e generale per produrre modelli di reti che mostrano sia un'abbondanza di percorsi brevi che efficienti ricerche decentralizzate. Ricordiamo che un focus sociale è qualsiasi tipo di comunità, ricerca occupazionale, quartiere, interesse condiviso, o attività che serve per organizzare la vita sociale attorno ad esso.

Foci sono un modo per riassumere le molte possibili ragioni per cui due persone possono conoscersi o diventare amici: perché vivono nello stesso isolato, lavorano nella stessa azienda, Ora, due persone possono avere molti possibili punti focali in comune, ma a parità di tutti gli altri, è probabile che i punti focali condivisi con poche persone sia i più forti generatori di nuovi legami sociali. Ad esempio, due persone possono entrambi lavorare per la stessa compagnia di mille persone, ma è il fatto che entrambi appartengono alla stessa organizzazione di tutoraggio di 20 persone che è probabile che si conoscano. Quindi, un modo naturale per definire la distanza sociale tra due persone è dichiarare che è la dimensione del focus più piccolo che include entrambi.

Nelle sezioni precedenti, abbiamo utilizzato modelli che creano collegamenti in un social network da una nozione di base della distanza geografica.

Consideriamo come questo potrebbe funzionare di più nozione generale di distanza sociale. Supponiamo di avere una collezione di nodi e una collezione dei focus a cui appartengono - ogni focus è semplicemente un set contenente alcuni nodi. Lasciamo $\text{dist}(v, w)$ denota la distanza sociale tra i nodi v e w come definito in termini di condivisione focus: $\text{dist}(v, w)$ è la dimensione del fuoco più piccolo che contiene sia v che w . Ora, seguendo lo stile dei modelli precedenti, costruiamo un collegamento tra ogni coppia di nodi v e w con probabilità proporzionale a $\text{dist}(v, w)^{-p}$. Ad esempio, nella Figura 20.11, il nodo etichettato v costruisce collegamenti ad altri tre nodi a distanze sociali 2, 3 e 5. Uno può ora mostrare che quando vengono generati i collegamenti in questo modo con esponente $p = 1$, la rete risultante supporta una ricerca decentralizzata efficiente.

Ci sono aspetti di questo risultato che sono simili a ciò che abbiamo appena visto per l'amicizia basata sul grado. Innanzitutto, come per l'amicizia basata sul rango, esiste una semplice descrizione del sottostante principio: quando i nodi si collegano l'un l'altro con probabilità inversamente proporzionale alla loro distanza sociale, la rete risultante è ricercabile in modo efficiente. Secondo, l'esponente $p = 1$ è ancora la generalizzazione naturale della legge dell'inverso del quadrato per il modello di griglia semplice. Per capire perché, supponiamo di prendere una griglia di nodi e definire un insieme di focus come segue: per ogni posizione v sulla griglia e ogni raggio possibile intorno a quella posizione, c'è una messa a fuoco consistente di tutti i nodi che si trovano a distanza r di v . (Essenzialmente, questi sono focolai composti da tutti gli individui che vivono insieme in quartieri e locali di varie dimensioni.) Quindi per due nodi che sono a distanza d , il loro più piccolo focus condiviso ha un numero di nodi proporzionale a d^2 , quindi questa è la loro distanza sociale. Quindi, il collegamento con la probabilità proporzionale a d^{-2} è essenzialmente uguale al collegamento con la probabilità inversamente proporzionale alla loro distanza sociale.

Studi recenti sui dati who-talks-to-who si adattano a questo modello alle strutture dei social network. In particolare, hanno analizzato un social network sui dipendenti di Hewlett Packard Research Lab, collegando due persone se si scambiano e-mail almeno sei volte nell'arco di un periodo di tre mesi. (Vedi Figura 20.12.) Hanno quindi definito un focus per ciascuno dei gruppi all'interno della struttura organizzativa, scoprendo che la probabilità di un legame tra due dipendenti a distanza sociale all'interno dell'organizzazione è proporzionata a $d^{-3/4}$. In altre parole, l'esponente sulla probabilità per questa rete è vicino, ma più piccolo di del miglior esponente per rendere

efficiente la ricerca decentralizzata all'interno della rete.

Questo è importante non solo per capire le proprietà del piccolo mondo di questi reti, ma anche più in generale per i modi in cui l'omofilia e i legami deboli si combinano per produrre i tipi di strutture che troviamo nelle reti reali.

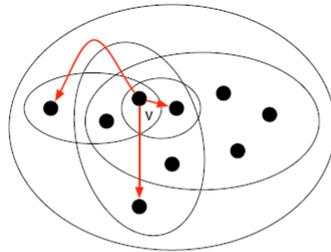


Figure 20.11: When nodes belong to multiple foci, we can define the social distance between two nodes to be the smallest focus that contains both of them. In the figure, the foci are represented by ovals; the node labeled v belongs to five foci of sizes 2, 3, 5, 7, and 9 (with the largest focus containing all the nodes shown).

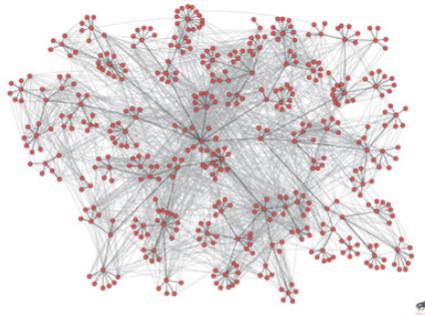


Figure 20.12: The pattern of e-mail communication among 436 employees of Hewlett Packard Research Lab is superimposed on the official organizational hierarchy, showing how network links span different social foci [6]. (Image from <http://www-personal.umich.edu/~ladamic/img/hplabsemailhierarchy.jpg>)

Ricerca come un'istanza di risoluzione dei problemi decentralizzata. Mentre l'esperimento di Milgram è stato progettato per testare l'ipotesi che le persone siano collegate da percorsi brevi nel social network globale, la nostra discussione qui mostra che è servito anche come studio empirico della capacità delle persone di risolvere collettivamente un problema - in questo caso, cercando un percorso verso un individuo lontano - utilizzando solo informazioni molto locali e comunicando solo con i loro vicini nel social

network. Oltre ai tipi di metodi di ricerca discussi qui, basandosi sul mirare il più vicino possibile all'obiettivo in ogni fase, anche i ricercatori hanno studiato l'efficacia delle strategie di ricerca del percorso in cui le persone inviano messaggi agli amici che hanno un numero particolarmente elevato di archi (sulla premessa che saranno "migliori").

L'idea che i social network possano essere efficaci in questo tipo di problemi decentralizzati è una premessa intrigante, applicabile in senso più ampio del solo al problema della ricerca del percorso che Milgram considerava. Ci sono molti problemi possibili le persone che interagiscono in una rete potrebbero provare a risolvere, ed è naturale supporre che la loro efficacia dipenderà sia dalla difficoltà del problema da risolvere sia dalla rete che li collega. C'è una lunga storia di interesse sperimentale nel collettivo problem-solving, e in effetti un modo per visualizzare gli esperimenti sulla capacità di un gruppo di persone di trovare collettivamente la soluzione quando la loro interazione è vincolata da una rete. Recenti esperimenti hanno esplorato questo problema e c'è anche una crescente linea di lavoro nel design di sistemi in grado di sfruttare il potere di risoluzione dei problemi umani collettivi di grandi dimensioni.

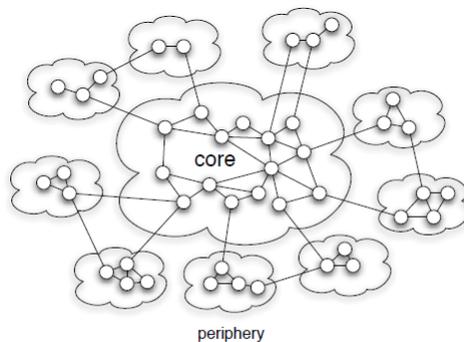


Figure 20.13: The core-periphery structure of social networks.

Analysis of Decentralized Search. Nella Sezione 20.4, abbiamo dato alcune intuizioni di base sul perché una distribuzione inversa di collegamenti con la distanza è possibile con una ricerca decentrata efficace.

In questa sezione, descriviamo l'analisi completa del processo. Per rendere i calcoli un po' più semplici, modifichiamo il modello in un certo senso: poniamo i nodi in una dimensione anziché in due. In realtà, l'argomento è essenzialmente lo stesso, non importa quante dimensioni hanno i nodi, ma

una dimensione rende le cose più pulite. Vedremo che il miglior esponente per la ricerca è uguale alla dimensione, quindi nella nostra analisi monodimensionale useremo un esponente di $q = 1$ piuttosto che $q = 2$. Alla fine, discuteremo i modi minori in cui l'argomento deve essere adattato in due o più dimensioni. Dovremmo anche menzionare, ricordando la discussione precedente nel capitolo, che esiste una seconda parte fondamentale di questa analisi - mostrando che questa scelta di q è in realtà ideale per la ricerca decentralizzata nel limite di aumentare le dimensioni della rete.

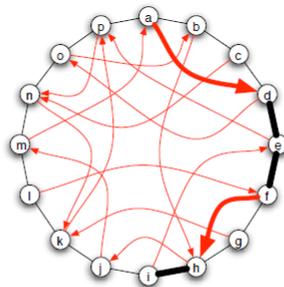


Figure 20.15: In myopic search, the current message-holder chooses the contact that lies closest to the target (as measured on the ring), and it forwards the message to this contact.

A. L'esponente ottimale in una dimensione. Ecco il modello che vedremo. Un insieme di n nodi sono disposti su un livello unidimensionale, come mostrato nella Figura 20.14 (a), con ciascun nodo collegato da archi diretti agli altri due immediatamente adiacenti. Ogni nodo v ha anche un singolo bordo diretto ad un altro nodo sull'anello; la probabilità che v sia collegato a un particolare nodo w è $d(v, w)^{-1}$, dove $d(v, w)$ è la loro distanza sull'anello. Chiameremo il nodi a cui v ha un arco tra i suoi contatti: i due nodi adiacenti ad esso sull'anello sono i suoi contatti locali, e l'altro è il suo contatto a lungo raggio. La struttura generale è quindi un anello che è aumentato con archi casuali, come mostrato nella Figura 20.14 (b). Di nuovo, questo è essenzialmente solo una versione unidimensionale della griglia con archi casuali.

Ricerca Miopica. Scegliamo un nodo di avvio casuale e un nodo di destinazione casuale su questa rete ad anello aumentata. L'obiettivo, come nell'esperimento Milgram, è di inoltrare un messaggio dall'inizio alla destinazione, con ogni nodo intermedio sulla strada, solo conoscendo le posizioni dei propri vicini e la posizione della destinazione. La strategia di forwarding

che analizziamo, che funziona bene sul ring quando $q = 1$, è una tecnica semplice che chiamiamo **ricerca miope**: quando un nodo v sta tenendo il messaggio, passa al contatto che si trova il più vicino possibile al ring. La ricerca può chiaramente essere eseguita anche da nodi che non conoscono la rete tranne le posizioni dei loro amici e la posizione di t , ed è una ragionevole approssimazione usata dalla maggior parte delle persone in esperimenti in stile Milgram. Ad esempio, la Figura 20.15 mostra il percorso miope che sarebbe stato costruito se avessimo scelto a come nodo iniziale e i come nodo di destinazione nella rete dalla Figura 20.14 (b).

- **1.** Nodo a invia il messaggio al nodo d , poiché tra i contatti p , b e d , nodo d si trova più vicino a me sul ring;
- **2.** Quindi passa il messaggio al suo contatto locale e , allo stesso modo passa il messaggio al suo contatto locale f , dal momento che i contatti a lunga distanza di entrambi d ed e portano via da lì l'anello, non più vicino ad esso.
- **3.** Il nodo f ha un contatto a lungo raggio h che si rivela utile, quindi lo passa a h . Nodo h in realtà ha l'obiettivo come contatto locale, quindi lo consegna direttamente a i , completando il percorso in cinque passi.

Si noti che questo percorso miope non è il percorso più breve da a a i . Se qualcuno lo avesse saputo l'amico b in realtà aveva h come contatto, avrebbe potuto consegnare il messaggio a b , prendendo così il primo passo nel percorso a - b - h - i in tre fasi. È proprio questa mancanza di conoscenza della struttura di rete completa che impedisce alla ricerca miope di trovare il vero percorso più breve in generale. Nonostante ciò, tuttavia, vedremo in seguito che, in attesa, la ricerca miope trova percorsi sorprendentemente brevi.

Analizzando la ricerca miope: il piano di base. Costruiamo il modello. Generiamo una rete casuale aggiungendo archi lunghi su un anello come sopra. Quindi selezioniamo 2 nodi casuali di inizio e destinazione. Il numero di passaggi richiesti dalla ricerca miope è ora a variabile casuale X , e siamo interessati a mostrare che $E[X]$, il valore atteso di X , è relativamente piccolo. Il nostro piano per mettere un limite al valore atteso di X segue l'idea contenuta nell'immagine di Milgram: teniamo traccia di quanto tempo impiega il messaggio a ridurre la sua distanza per fattori di due mentre si chiude sul bersaglio. Nello specifico, mentre il messaggio si sposta da s a t ,

diremo che è nella fase j della ricerca se la sua distanza dall'obiettivo è tra 2^j e 2^{j+1} . Si noti che il numero di le diverse fasi sono al massimo $\log_2 n$ - cioè il numero di raddoppiamenti necessari per passare da 1 a n .

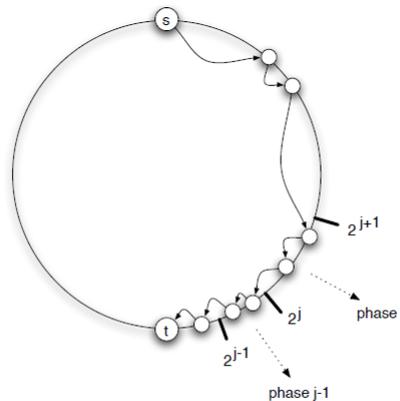


Figure 20.16: We analyze the progress of myopic search in *phases*. Phase j consists of the portion of the search in which the message's distance from the target is between 2^j and 2^{j+1} .

Possiamo scrivere X , il numero di passi compiuti dalla ricerca completa, come $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{\log n}$, cioè il tempo totale impiegato dalla ricerca è uguale alla somma dei tempi impiegati in ciascuna fase. La linearità dell'aspettativa dice che l'aspettativa di una somma di variabili casuali è uguale alla somma delle loro aspettative individuali, e così abbiamo

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_{\log n}] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_{\log n}]$$

Mostreremo ora - e questo è il punto cruciale dell'argomento - il valore atteso di ciascuno X_j è al massimo proporzionale al $\log n$. In questo modo, $E[X]$ sarà una somma di termini $\log n$ e quindi avremo dimostrato che $E[X]$ è al massimo proporzionale a $(\log n)^2$. Questo raggiungerà il nostro obiettivo generale di mostrare che la ricerca miope è molto efficiente con la distribuzione dei collegamenti: la rete completa ha n nodi, ma la costruzione miope costruisce al percorso che è esponenzialmente più piccolo: proporzionale al quadrato del $\log n$.

Passaggio intermedio: la costante di normalizzazione. Nell'attuare questa strategia, la prima cosa che dobbiamo risolvere è in effetti qualcosa di molto semplice: abbiamo detto sempre che v costituisce il suo legame a lungo

raggio a w con probabilità proporzionale a $d(v, w)^{-1}$, ma qual'è la costante della proporzionalità? Come in ogni caso quando conosciamo un insieme di probabilità fino a una costante mancante di proporzionalità $1 / Z$, il valore di Z è qui la somma di $d(v, u)^{-1}$ su tutti i nodi $u \neq v$ sull'anello. La probabilità di v con collegamento a w è quindi uguale a $\frac{1}{Z}d(v, w)^{-1}$. Per calcolare il valore di Z , notiamo che ci sono due nodi alla distanza 1 da v , due a distanza 2, e più generalmente a due a ogni distanza da $n / 2$. Supponendo che n sia pari, c'è anche un singolo nodo alla distanza $n / 2$ da v - il nodo diametralmente opposto a quello in poi l'anello. Pertanto, abbiamo

$$Z \leq 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2}\right)$$

La quantità tra parentesi a destra è un'espressione comune nei calcoli probabilistici: la somma dei primi k reciproci, per alcuni k , in questo caso $n / 2$.

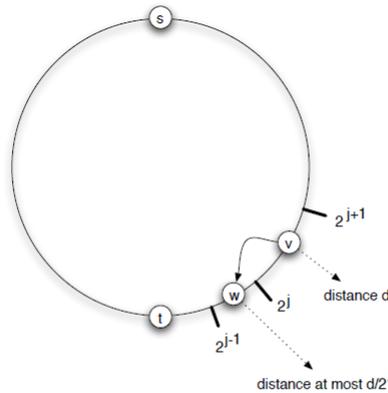


Figure 20.18: At any given point in time, the search is in some phase j , with the message residing at a node v at distance d from the target. The phase will come to an end if v 's long-range contact lies at distance $\leq d/2$ from the target t , and so arguing that the probability of this event is large provides a way to show that the phase will not last too long.

Analizzando il tempo trascorso in una fase di ricerca miopica.

Finalmente, veniamo all'ultima e centrale fase dell'analisi: mostrare che il tempo speso dalla ricerca in qualsiasi fase è molto piccolo. Scegliamo una particolare fase j della ricerca, quando il messaggio è su un nodo v la cui distanza dall'obiettivo t è un numero d tra 2^j e $2^j + 1$. La fase verrà a terminare una volta che la distanza dall'obiettivo diminuisce al di sotto di 2^j , e

si dimostra che ciò avverrà in tempo breve.

B. Dimensioni superiori e altri esponenti. Utilizzando l'analisi che abbiamo appena completato, discutiamo ora di due ulteriori problemi. Per prima cosa, abbozziamo come può essere usato per analizzare reti costruite aggiungendo contatti a lungo raggio a nodi disposti in due dimensioni. Poi mostriamo come, aumentando le dimensioni della rete, la ricerca è più efficiente quando q è uguale alla dimensione sottostante rispetto a quando è uguale a qualsiasi altro valore.

L'analisi delle due dimensioni. Non è difficile adattare la nostra analisi per l'unidimensionalità. In sostanza, abbiamo solo usato il fatto che eravamo in una dimensione in due punti distinti nell'analisi: quando abbiamo determinato la costante di normalizzazione Z e quando dovevamo argomentare che c'erano almeno d nodi nella distanza $d/2$ del bersaglio t . Questo fattore di d ha cancellato il $d-1$ nella probabilità di collegamento, permettendoci di concludere che la distanza dal bersaglio in un dato passo era almeno proporzionale a $1/(\log n)$, indipendentemente dal valore di d .

A livello qualitativo, quest'ultimo punto è il cuore dell'analisi: con probabilità di collegamento d^{-1} sull'anello, la probabilità di collegamento a qualsiasi nodo compensa esattamente il numero di nodi vicini a t , e così la ricerca miope fa progressi ad ogni distanza possibile il bersaglio.

Quando andiamo a due dimensioni, il numero di nodi entro la distanza $d/2$ del bersaglio sarà proporzionale a d^2 . Questo suggerisce che per ottenere la stessa bella proprietà di cancellazione, dovremmo avere v link a ciascun nodo w con probabilità proporzionale a $d(v, w)^{-2}$, e questo esponente -2 è ciò che useremo. Tenendo presenti le idee di cui sopra, e con questo cambiamento nell'esponente a -2 , l'analisi per due dimensioni è quasi identica a quello che abbiamo appena visto per l'unidimensionalità. Per prima cosa, la costante di normalizzazione Z è ancora proporzionale al $\log n$ quando la probabilità di v linking w è proporzionale a $d(v, w)^{-2}$. Consideriamo quindi $\log n$ diverse fasi come in precedenza e consideriamo la probabilità che in un dato momento, l'attuale portatore di messaggi v abbia un lungo raggio per contattare w che dimezza la distanza dal bersaglio, terminando immediatamente la fase. Ora, il numero di nodi all'interno della distanza $d/2$ del target è proporzionale a d^2 e la probabilità che i collegamenti v siano ciascuno proporzionale a $1/(d^2 \log n)$. Pertanto, la probabilità che il messaggio dimezzi la sua distanza alla destinazione in questo passaggio è almeno $d^2/(d^2 \log n) = 1/(\log n)$ e il

resto dell'analisi finisce come prima.

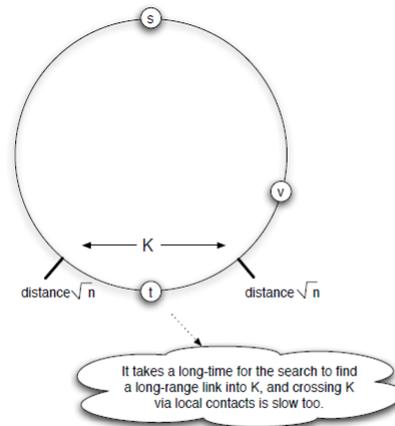


Figure 20.21: To show that decentralized search strategies require large amounts of time with exponent $q = 0$, we argue that it is difficult for the search to cross the set of \sqrt{n} nodes closest to the target. Similar arguments hold for other exponents $q < 1$.

Perché la ricerca è meno efficiente con altri esponenti. Infine, analizziamo perché la ricerca decentralizzata è meno efficiente quando l'esponente è qualcos'altro. Ci concentreremo, sul motivo per cui la ricerca non funziona bene quando $q = 0$, cioè quando i collegamenti a lungo raggio vengono scelti in modo uniforme a caso. Inoltre, parleremo di nuovo del anello monodimensionale anziché griglia bidimensionale, poiché le cose sono un po' più pulite su una dimensione, anche se ancora una volta l'analisi in due dimensioni è essenzialmente la stessa.

L'idea chiave, come con l'esponente "buono" $q = 1$, è considerare l'insieme di tutti i nodi ad una certa distanza dall'obiettivo t . Ma mentre nel caso di $q = 1$ volevamo discutere che è facile inserire set sempre più piccoli centrati attorno a t , qui vogliamo identificare un insieme di nodi centrati su quello che è in qualche modo "impenetrabile". In realtà, non è difficile farlo. Sia K l'insieme di tutti i nodi entro la distanza inferiore a \sqrt{n} del bersaglio t . Adesso, con alta probabilità, il punto di partenza della ricerca si trova al di fuori di K . Perché a lungo raggio i contatti sono creati in modo uniforme a caso (poiché $q = 0$), la probabilità che qualsiasi nodo ha un contatto a lungo raggio dentro K è uguale alla dimensione di K diviso per n . Pertanto, qualsiasi strategia di ricerca decentralizzata necessiterà di almeno $n/2$ passaggi in attesa di trovare un nodo con un contatto a lungo raggio in K . Quindi,

poiché non trova un collegamento a lungo raggio che porta a K , non può raggiungere l'obiettivo in meno di n passi, dato che ci vorrebbe tanto tempo per "camminare" passo dopo passo attraverso K usando solo connessioni tra i contatti locali. Da questo, si può dimostrare che il tempo previsto per qualsiasi strategia di ricerca decentralizzata per raggiungere t deve essere almeno proporzionale a \sqrt{n} .

Ripasso - Watts e Strogats modell Consideriamo un set di n nodi disposti a ring, dove ogni nodo è connesso:

- ai due nodi adiacenti
- ad un nodo a caso nella rete e la probabilità che il nodo sia connesso ad un altro nella rete è inversamente proporzionale alla distanza tra i nodi.

Quindi, ogni nodo ha contacts:

- 2 local contacts, i 2 nodi adiacenti
- 1 long range contact, il nodo non immediatamente adiacente

Come nell'esperimento di Milgram, ci interessa spedire un messaggio da un nodo s di partenza scelto a caso ad un nodo target t , anch'esso scelto a caso.

Ogni nodo nel cammino da s a t conoscerà solo i propri nodi vicini e la loro posizione e la posizione del nodo target, ma non conoscerà l'intera struttura della rete.

La strategia di spedizione che consideriamo è la **ricerca miofica**: in generale un nodo conoscendo solo la posizione nella rete dei propri vicini e del nodo target, passa il messaggio al nodo il più possibile vicino a t .

Il cammino così trovato non è quello più breve, ma comunque resta breve. La ricerca è stile **greedy** e non **ottimale**.

Ora, sapendo che il numero di step richiesti da questa ricerca è una variabile casuale/random X , quello che ci interessa dimostrare è che $E[X]$, il valore atteso di X , sia basso.

Coinsideriamo il fenomeno osservato nell'esperimento di Milgram, per cui all'avvicinarsi del messaggio al target, la distanza si dimezza, e diciamo che dati due nodi s e t , il messaggio è nella fase j se la distanza del messaggio dal target t è compresa tra 2^j e 2^{j+1} .

Osservazione: Il numero massimo di steps/fasi è $\log_2(n)$, fase \neq steps, fig 20.16.

Possiamo definire X come

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{\log_2(n)} \quad (29)$$

il tempo totale, espresso come la somma del tempo per ogni fase.

Il valore atteso di una somma di variabili casuali non è altro che la somma dei valori attesi, per cui

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_{\log_2(n)}] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_{\log_2(n)}] \quad (30)$$

Il valore atteso $\forall X_j$ è direttamente proporzionale a $\log_2(n)$ e quindi $E[X]$ sarà la somma di $\log_2(n)$ termini, che vuol dire che sarà al massimo proporzionale a $(\log_2(n))^2$.

Dimostrando ciò dimostreremo che la **ricerca miofica** è molto efficiente con una distribuzione di link fatta a ring e 3 nodi: sebbene la rete abbia n nodi, la ricerca ++++++miofica+++++ genera un cammino la cui lunghezza è al massimo il quadrato di $\log_2(n)$.

Primo passo della dimostrazione: Abbiamo detto che ogni nodo formerà il proprio **long range link** con una probabilità inversamente proporzionale alla distanza. Per cui siano u e v i nodi, allora si formerà un arco tra i due con probabilità inversamente proporzionale a $d(v, u)$.

Conoscendo il set di probabilità, il valore della costante di proporzionalità Z è la somma degli $d(u, v)^{-1}$ su tutti i vincoli $v \neq u$.

Dividendo tutte le $d(u, v)^{-1}$ per la costante Z , la probabilità di u di lineare v sarà $\frac{1}{Z} \cdot d(u, v)^{-1}$.

Inoltre, osserviamo dalla disposizione a ring della rete che ci sono 2 nodi a distanza 1 da 2, 2 a distanza 2 e così via: 2 nodi per ogni distanza d con $1 \leq d \leq 2$.

Osservazione: Assumendo che n sia un numero pari, ci sarà un nodo a distanza $n/2$ da u , quello diametralmente opposto nelle rete ad u .

Quindi avremo che:

$$Z \leq 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n/2}\right) \quad (31)$$

nella parentesi ci sono la somma dei K reciproci, con $1 \leq k \leq n/2$.

Determinare la costante Z per stabilire la probabilità della formazione di link vuol dire fare la somma dei prima K reciproci, con $K = n/2$.

Un limite superiore per questa somma può essere trovato considerando l'area sottostante la curva del grafico $y = \frac{1}{x}$, con $1 \leq x \leq 2$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(k) \quad (32)$$

quindi per $k = n/2$

$$Z \leq 2(1 + \ln(n/2)) = 2 + 2 \cdot \ln(n/2) \quad (33)$$

Ora, essendo che $x \leq \log_2(x)$, allora

$$Z \leq 2 + 2 \cdot \log_2(n/2) = 2 + 2 \cdot \log_2(n) - 2 \cdot \log_2(2) \quad (34)$$

$$Z \leq 2 - 2 + 2 \cdot \log_2(n) \quad (35)$$

$$z \leq 2 \cdot \log_2(n) \quad (36)$$

Trovato Z possiamo dire che la probabilità che ci sia un arco da u a v è

$$\frac{1}{Z} \cdot d(u, v)^{-1} \geq \frac{1}{2 \cdot \log_2(n)} \cdot d(u, v)^{-1} \quad (37)$$

15 [21] Epidemics

Lo studio delle malattie epidemiche è sempre stato un argomento in cui i problemi biologici si mescolano a quelli sociali. Quando parliamo di malattie epidemiche, siamo portati a pensare a malattie contagiose causate da agenti patogeni biologici - cose come l'influenza, il morbillo e la trasmissione sessuale malattie, che si diffondono da persona a persona. Le epidemie possono passare in modo esplosivo attraverso la popolazione, oppure possono persistere per lunghi periodi a bassi livelli. Nei casi estremi, una singola epidemia può avere un effetto significativo su un'intera civiltà.

Malattie e reti che le trasmettono. I modelli con cui le epidemie si diffondono attraverso gruppi di persone sono determinati non solo dalle proprietà del patogeno che lo trasporta - compresa la sua contagiosità, la lunghezza del suo periodo di contagiosità e la sua gravità - ma anche dalle strutture di rete all'interno della popolazione che sta influenzando. Il social network all'interno di una popolazione determina molto sul modo in cui la malattia riesce a diffondersi da una persona all'altra. Ma più in generale, le opportunità di diffusione di una malattia sono date da una rete di contatti: c'è un nodo per ogni persona e un vantaggio se due persone entrano in contatto l'una con l'altra in un modo che permetta alla malattia di diffondersi dall'uno all'altro.

Ciò suggerisce che modellare la rete è cruciale per la comprensione del meccanismo di diffusione di un'epidemia. Ciò ha portato alla ricerca studiando come i modelli di viaggio tramite la rete mondiale di compagnie aeree potrebbe influenzare la diffusione di una malattia in rapido movimento. Le reti di contatti sono importanti anche per capire come le malattie riescano a diffondersi attraverso sia le popolazioni animali sia attraverso le popolazioni vegetali, dove gli individui infetti occupano posizioni fisse e le malattie tendono ad avere un'impronta spaziale molto più chiara. Simili modelli sono stati impiegati per studiare la diffusione di virus informatici, con maliziosi software che si diffondono tra computer attraverso una rete di comunicazione.

L'agente patogeno e la rete sono strettamente intrecciati: anche all'interno della stessa popolazione, le reti di contatti per due diverse malattie possono avere strutture molto diverse, a seconda delle rispettive modalità di trasmissione delle malattie. Per una malattia altamente contagiosa, che include una trasmissione aerea basata su tosse e starnuti, la rete di contatto includerà un enorme numero di link, inclusa qualsiasi coppia di persone sedute insieme su

un autobus o un aeroplano. Per una malattia che richiede uno stretto contatto o una malattia a trasmissione sessuale, la rete di contatto sarà molto più rada, con molte meno coppie collegate da link. Distinzioni simili sorgono nello studio di virus informatici, dove un software che infetta i computer attraverso Internet avrà una rete di contatti molto più ampia di una che si diffonde a corto raggio comunicazione wireless tra dispositivi mobili vicini.

Connessioni alla diffusione di idee e comportamenti. Ci sono connessioni chiare tra malattie epidemiche e diffusione di idee attraverso i social network. Sia le malattie che le idee possono diffondersi da persona a persona, attraverso reti che connettono le persone, e in questo senso, esibiscono meccanismi strutturali molto simili - nella misura in cui la diffusione delle idee viene spesso definita "contagio sociale". Avendo considerato la diffusione delle idee, le innovazioni e i nuovi comportamenti nel Capitolo 19, **perché allora stiamo rivisitando questo argomento di nuovo nel contesto delle malattie?**

Nel contesto delle nostre discussioni sulle reti, la più grande differenza tra il contagio biologico e sociale sta nel processo attraverso il quale una persona "infetta" un'altra. Con il contagio sociale, le persone prendono decisioni per adottare una nuova idea o innovazione e i nostri modelli descritti nel capitolo 19 erano focalizzati sul collegamento dei processi decisionali sottostanti agli effetti più grandi a livello di rete. Con le malattie, d'altra parte, non solo c'è mancanza di decision making nella trasmissione della malattia da una persona all'altra, ma il processo è sufficientemente complesso e inosservabile a livello di persona a persona che è molto più utile modellarlo come casuale. Generalmente lo assumeremo random se due persone sono direttamente collegate nella rete di contatto e una di loro ha la malattia e se c'è una certa probabilità che lui o lei lo passerà all'altro. Questo uso di casualità ci consente di astrarre domande sui meccanismi di come una persona prende una malattia da un'altra, meccanismo sul quale altrimenti non avremmo modelli semplici utili.

Questa, quindi, sarà la differenza concreta nella nostra discussione sul contagio biologico piuttosto che sul contagio sociale - non tanto il nuovo contesto quanto le nuove classi di modelli, basati su processi casuali nelle reti che verranno impiegate. Nelle prossime tre sezioni, discuteremo alcuni dei modelli probabilistici più basilari per le epidemie nelle reti; quindi considereremo in che modo questi modelli forniscano informazioni su alcune questioni qualitative di base nella diffusione della malattia, compresa la sincronizzazione, i

tempi e la concorrenza nella trasmissione.

Prima di passare a questo, vale la pena notare che i modelli randomizzati possono anche a volte essere utili nello studio del contagio sociale, in particolare nei casi in cui i processi decisionali di base degli individui sono difficili da modellare e quindi è più utile intenderli come casuali. Spesso i due approcci - decisionali e probabilistici - producono risultati correlati, e a volte possono essere usati insieme.

Processi di ramificazione Iniziamo con il modello di contagio più semplice, che chiamiamo ramificazione dei processi. Funziona come segue:

- **First Wave.** Supponiamo che una persona portatrice di una nuova malattia entri in una popolazione, e la trasmetta ad ogni persona che incontra con una probabilità di p . Inoltre, supponiamo che incontri k persone mentre è contagioso; questa è la prima ondata dell'epidemia. Basato sulla trasmissione casuale della malattia dalla persona iniziale, alcune delle persone nella prima ondata potrebbero essere infettate dalla malattia, mentre altre no.
- **Second Wave.** Ora, ogni persona nella prima ondata esce nella popolazione e incontra diverse persone, dando luogo a una seconda ondata di $k * k = k^2$ persone. Ogni infetto della prima ondata passa la malattia a ciascuna persona della seconda onda che incontra, di nuovo con probabilità p ;
- **Wave Successiva.** Altre onde si formano allo stesso modo, dove ogni persona nell'ondata attuale incontra nuove persone, passando la malattia a ciascuna con probabilità p .

Quindi la rete di contatti per questa epidemia può essere disegnata come nella Figura 21.1 (a) (con $k = 3$ e solo le prime tre onde mostrate). Ci riferiamo ad una rete come un albero: ha un singolo nodo in alto chiamato root; ogni nodo è collegato a un insieme di nodi nel livello sottostante. L'albero che forma la rete di contatti per il processo di ramificazione è infatti infinito, poiché continueremo ad avere onde all'infinito.

Ora, qual'è il comportamento di un'epidemia in questo modello? Possiamo immaginare la diffusione dell'epidemia evidenziando gli archi della rete su cui passa la malattia con successo da una persona all'altra - ricorda che ciascuna di queste infezioni si verifica con probabilità p . Quindi, la Figura

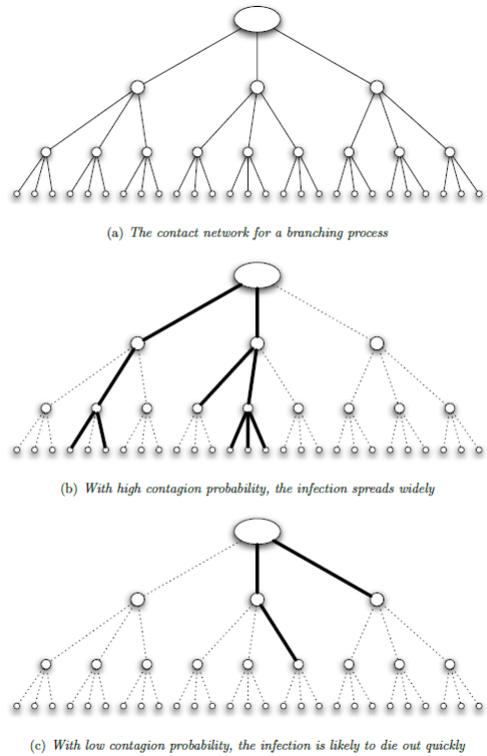


Figure 21.1: The branching process model is a simple framework for reasoning about the spread of an epidemic as one varies both the amount of contact among individuals and the level of contagion.

21.1 (b) mostra come un'epidemia infetta due persone nella prima ondata, tre nella seconda ondata, cinque nella terza ondata. Figura 21.1 (c) è mostrata un'epidemia molto più mite: delle due persone infettate nella prima ondata, una non infetta nessuno e l'altra infetta solo un'ulteriore persona che a sua volta non la trasmette. Questa malattia è scomparsa dopo la seconda ondata, avendo infettato solo 4 persone in totale.

Il numero riproduttivo di base e una dicotomia per i processi di ramificazione. L'ultima osservazione sulla Figura 21.1 (c) riflette una proprietà fondamentale dei processi di ramificazione: se la malattia in un processo di ramificazione raggiunge un'onda dove non riesce a infettare nessuno, allora si è estinta. Quindi ci sono solo due possibilità per una malattia nel modello del processo di ramificazione: esso raggiunge un'onda dove non

infetta nessuno, quindi si estingue dopo un numero finito di passi o esso continua ad infettare le persone in ogni onda, procedendo all'infinito attraverso la rete di contatti. C'è una semplice condizione per distinguere queste due possibilità, basata su una quantità chiamata **numero riproduttivo di base** della malattia. Il numero riproduttivo di base, indicato con R_0 , è il numero atteso di nuovi casi di malattia causata da un singolo individuo. Dal momento che nel nostro modello tutti incontrano k nuove persone e si infetta qualcuno con probabilità p , il numero riproduttivo di base qui è dato da $R_0 = pk$. L'esito della malattia in un modello di processo di ramificazione è determinato dal fatto che il numero riproduttivo sia più piccolo o più grande di 1.

Claim: se $R_0 < 1$, allora con probabilità 1, la malattia muore dopo un finito numero di onde. Se $R_0 > 1$, allora con probabilità maggiore di 0 la malattia persiste infettando almeno una persona in ogni ondata.

Quando $R_0 < 1$, la malattia non è in grado di rigenerarsi: Ogni infetto produce meno di un nuovo caso in attesa, e così la dimensione dell'epidemia è costantemente in discesa. Quando $R_0 > 1$, d'altra parte, la dimensione dell'epidemia è costantemente in salita. Si noti, tuttavia, che anche quando $R_0 > 1$, la conclusione è semplicemente che la malattia persiste con probabilità positiva, non con assoluta certezza: ogni volta che $p < 1$, allora c'è sempre qualche possibilità che nessuna delle prime persone infette riuscirà a infettare chiunque altro, causando la morte della malattia. In altre parole, anche una malattia ultra-contagiosa può semplicemente diventare "sfortunata" e svanire dalla popolazione.

Supponiamo di avere un processo di ramificazione in cui R_0 è molto al di sotto di 1, e aumentiamo un po' la probabilità di contagio p ; il risultato potrebbe spingere R_0 sopra 1, provocando improvvisamente una probabilità positiva di un'enorme epidemia. Lo stesso effetto può accadere anche nella direzione opposta, dove si riduce la contagiosità di una malattia per spingere R_0 sotto 1 può eliminare il rischio di una grande epidemia. E poiché R_0 è il prodotto di p e k , piccole variazioni nel numero di persone k possono avere un grande effetto quando R_0 è vicino a 1. Tutto ciò suggerisce che attorno al valore critico $R_0 = 1$, può valere la pena investire di grandi quantità di sforzo anche per produrre piccoli spostamenti nel numero di riproduzione di base. Da quando R_0 è il prodotto dei due termini p e k , è in effetti facile interpretare due tipi fondamentali di misure di sanità pubblica in termini di

riduzioni a R_0 : messa in quarantena delle persone, che riduce la quantità k e incoraggiare misure come migliori pratiche sanitarie da ridurre la diffusione dei germi, che riduce la quantità p .

Il modello del processo di ramificazione è chiaramente un modello molto semplificato di diffusione della malattia; la struttura della rete di contatti, senza triangoli, ricorda il nostro primo passaggio a un modello per il fenomeno del mondo piccolo nel capitolo 20. Quindi, nelle prossime sezioni, esamineremo i modelli in grado di gestire reti di contatti più complesse. Tuttavia, la nozione di il numero riproduttivo di base è ancora una guida euristica utile per modelli più complessi.

Il modello epidemico SIR. Ora sviluppiamo un modello epidemico che può essere applicato a qualsiasi struttura di rete. Per fare questo, preserviamo gli ingredienti di base del modello di processo di ramificazione a livello di singoli nodi, ma rendiamo la struttura dei contatti molto più generale. Un singolo nodo nel processo di ramificazione passa attraverso tre fasi potenziali durante il corso del epidemico:

- **Susceptible.** Prima che il nodo abbia preso la malattia, è suscettibile alle infezioni dei suoi vicini;
- **Infectious.** Una volta che il nodo ha preso la malattia, è contagioso e ha qualche probabilità di infettare ciascuno dei suoi vicini suscettibili.
- **Removed.** Dopo che un particolare nodo ha vissuto l'intero periodo infettivo, questo nodo viene rimosso dalla considerazione, dal momento che non rappresenta più una minaccia di infezione futura.

Usando questo "ciclo di vita" a tre stadi per la malattia in ciascun nodo, ora definiamo un modello per epidemie sulle reti. Ci viene dato un grafico diretto che rappresenta la rete di contatti; così un arco che punta da v a w nel grafico significa che se v diventa infetto ad un certo punto, la malattia ha il potenziale per diffondersi direttamente a w . Per rappresentare un contatto simmetrico tra le persone, dove entrambi hanno il potenziale per infettare direttamente l'altro, possiamo inserire archi diretti puntati su ogni direzione: sia da v a w che anche da w a v . Dal momento che i contatti tra le persone sono spesso simmetriche, va bene usare le reti in cui la maggior parte degli archi appaiono in ogni direzione, ma a volte è conveniente essere in grado di esprimere contatti asimmetrici.

Ora, ogni nodo ha il potenziale per passare attraverso il ciclo di vita, che abbrevieremo con S, I e R. Il progresso dell'epidemia è controllato dalla struttura della rete di contatti e da due ulteriori quantità: p (la probabilità di contagio) e tI (la lunghezza dell'infezione).

- Inizialmente, alcuni nodi sono nello stato I e tutti gli altri sono nello stato S;
- Ogni nodo v che entra nello stato I rimane contagioso per un numero fisso di passi tI ;
- Durante ciascuno di questi passi tI , v ha una probabilità p di passare la malattia a ciascuno dei suoi vicini suscettibili;
- Dopo i passi tI , il nodo v non è più contagioso o suscettibile di ulteriori attacchi di malattia; lo descriviamo come rimosso (R), dal momento che ora è un nodo che non può più catturare o trasmettere la malattia.

Questo descrive il modello completo; ci riferiamo ad esso come il modello SIR. La Figura 21.2 mostra un esempio del modello SIR che si apre su una particolare rete di contatti attraverso passaggi successivi; in ogni passaggio, i nodi con i bordi neri e rossi sono nello stato I e i nodi ombreggiati con bordi sottili sono nello stato R. Il modello SIR è chiaramente più appropriato per una malattia che colpisce ogni individuo una volta nella vita; dopo essere stato infettato, un nodo viene rimosso perché ha acquisito immunità per tutta la vita o perché la malattia l'ha uccisa. Anche che il modello del processo di ramificazione dalla Sezione 21.2 è un caso speciale del modello SIR: corrisponde semplicemente al modello SIR dove $tI = 1$ e la rete di contatti è un albero infinito, con ogni nodo connesso ad un numero fisso di vicini nel livello sottostante.

Estensioni al modello SIR. Sebbene la rete di contatti nel modello generale SIR può essere arbitrariamente complessa, le dinamiche della malattia sono ancora modellate in modo semplice. Le probabilità di contagio sono impostate su un valore uniforme p , e la contagiosità ha una sorta di proprietà "on-off": un nodo è ugualmente contagioso per ciascuno dei passaggi tI mentre ha la malattia. Tuttavia, non è difficile estendere il modello per gestire ipotesi più complesse. In primo luogo, possiamo facilmente catturare l'idea che il contagio sia più probabile tra alcune coppie di nodi assegnando

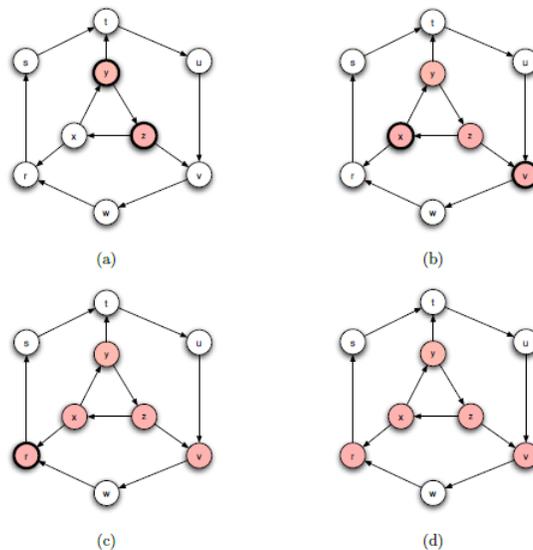


Figure 21.2: The course of an SIR epidemic in which each node remains infectious for a number of steps equal to $t_I = 1$. Starting with nodes y and z initially infected, the epidemic spreads to some but not all of the remaining nodes. In each step, shaded nodes with dark borders are in the Infectious (I) state and shaded nodes with thin borders are in the Removed (R) state.

una probabilità separata $p_{v,w}$ a ciascuna coppia di nodi v e w per i quali v sia collegato a w nella rete di contatti diretti. Qui, valori più alti di $p_{v,w}$ corrispondono a più vicini e quindi ad un più probabile contagio, mentre valori più bassi indicano un contatto meno intenso. Possiamo anche scegliere di modellare il periodo infettivo in modo casuale, assumendo che il nodo infetto ha una probabilità q di recupero in ogni passaggio mentre è infetto, lasciando gli altri dettagli del modello così come sono.

Il ruolo del numero riproduttivo di base. Discutiamo ora alcune osservazioni riguardo al modello SIR, concentrandosi sulla versione più basilare del modello. Innanzitutto, ricordiamo l'affermazione fatta alla fine della Sezione 21.2, quella nelle reti che non hanno una struttura ad albero, la semplice dicotomia nel comportamento epidemico è determinata dal numero riproduttivo di base R_0 che non sempre tiene. In realtà, non è difficile costruire un esempio che mostri come questa dicotomia si rompa. Per fare ciò, iniziamo con la rete illustrata nella Figura 21.3. Consideriamo un'epidemia di SIR in cui $t_I = 1$, la probabilità di infezione p è $2/3$, e i due nodi all'estrema

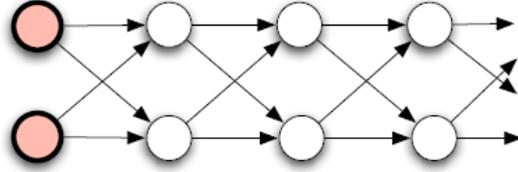


Figure 21.3: In this network, the epidemic is forced to pass through a narrow “channel” of nodes. In such a structure, even a highly contagious disease will tend to die out relatively quickly.

sinistra sono quelli che sono inizialmente infetti. Quando non abbiamo una rete di albero, dobbiamo decidere come definire un **analogo** del numero riproduttivo di base. In una rete molto strutturata come quella della Figura 21.3, possiamo lavorare direttamente dalla definizione di R_0 come numero atteso di nuovi casi di malattia causata da un singolo individuo. Nella Figura 21.3, ciascun nodo infetto ha bordi a due nodi nel livello successivo; poiché infetta ciascuna con probabilità $2/3$, il numero previsto di nuovi casi causati da questo nodo è $4/3$.

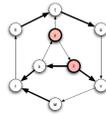


Figure 21.4: An equivalent way to view an SIR epidemic is in terms of percolation, where we decide in advance which edges will transmit infection (should the opportunity arise) and which will not.

Quindi nel nostro esempio, $R_0 > 1$. Nonostante questo, tuttavia, è facile vedere che la malattia morirà quasi sicuramente dopo aver raggiunto solo un numero finito di passi. In ogni strato, lì sono quattro spigoli che portano al livello successivo, e ognuno di essi fallirà nel trasmettere la malattia con probabilità $1/3$. Pertanto, con probabilità $(1/3)^4 = 1/81$, tutti e quattro gli archi non riusciranno a trasmettere la malattia - e a questo punto, questi quattro archi diventano un "posto di blocco", garantendo che la malattia non possa mai raggiungere la porzione della rete oltre a loro. Quindi c'è una probabilità di almeno $1/81$ di ogni nodo sarà il suo ultimo. Pertanto, con probabilità 1, deve terminare dopo un numero finito di nodi.

Questo è un esempio molto semplice, ma indica già come diverse strutture di rete possono essere più o meno favorevoli alla diffusione di una malat-

tia. Considerando che la rete di contatti del processo di ramificazione dalla Sezione 21.2 era un albero che si espandeva rapidamente in tutte le direzioni, la rete in Figura 21.3 costringe la malattia a passare attraverso uno stretto "canale" in cui una piccola ripartizione nel contagio può cancellarlo.

SIR Epidemics and Percolation. Finora abbiamo pensato alle epidemie SIR come processi dinamici, in cui lo stato della rete si evolve passo dopo passo nel tempo. Questo cattura le dinamiche temporali della malattia stessa mentre si diffonde attraverso una popolazione. È interessante notare, tuttavia, che esiste una visione equivalente e completamente statica di queste epidemie, utile dal punto di vista della modellazione.

Descriviamo ora come arrivare a questa visione statica del processo, concentrandoci sulla base Modello SIR in cui $tI = 1$. Consideriamo un punto in un'epidemia SIR quando un nodo v è appena diventato contagioso, e ha un vicino sensibile w . Il nodo v ha una possibilità di infettare w (poiché $tI = 1$), e riesce con probabilità p . Continuando con questo ragionamento, possiamo in realtà assumere che per ogni arco tra contatti della rete - da un nodo v a un nodo w - una moneta con probabilità "testa" p viene girata su all'inizio del processo (indipendentemente dalle monete per tutte le altre coppie di vicini), e il risultato viene archiviato in modo che possa essere successivamente verificato nel caso in cui v divenga contagiosa mentre w è sensibile.

Con tutte le monete lanciate in anticipo, il processo SIR può essere visualizzato come segue. Gli archi della rete per cui il lancio della moneta ha successo sono dichiarati aperti; Gli archi rimanenti sono dichiarati bloccati. La situazione è ora come nella figura 21.4, che mostra un risultato di esempio di lanci di monete coerenti con il modello di infezioni nell'esempio dalla figura 21.2. E ora possiamo intuire la rappresentazione del corso dell'epidemia: un nodo v si infetterà durante l'epidemia se e solo se c'è un percorso verso v da uno dei nodi inizialmente infetti che consiste interamente di archi aperti. Quindi, mentre la Figura 21.4 sembra superficialmente diversa dal sequenza di fasi nella Figura 21.2, è in effetti un modo compatto per riassumere il corso dell'epidemia: **i nodi che alla fine sono infetti sono proprio quelli che possono essere raggiunti dai nodi inizialmente infetti lungo una sequenza di bordi aperti nella rete.**

Questa vista statica del modello viene spesso definita **percolazione**.

Il modello epidemico del SIS. Nelle sezioni precedenti abbiamo con-

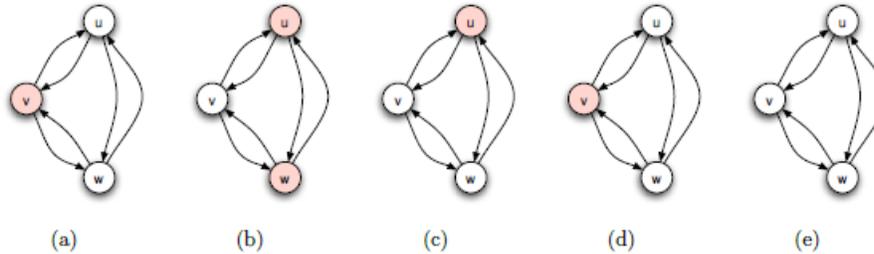


Figure 21.5: In an SIS epidemic, nodes can be infected, recover, and then be infected again. In each step, the nodes in the Infectious state are shaded.

siderato modelli per epidemie in cui ogni individuo contrae la malattia al massimo una volta. Tuttavia, una semplice variazione su questi modelli ci consente di ragionare sulle epidemie in cui i linfonodi possono essere reinfectati più volte. Per rappresentare tali epidemie, abbiamo nodi che si alternano semplicemente tra due possibili stati: sensibili (S) e infettivi (I). Non c'è stato rimosso (R) qui; piuttosto, dopo a il nodo è infettato, torna ciclicamente allo stato sensibile ed è pronto per prendere di nuovo la malattia. A causa di questa alternanza tra gli stati S e I, ci riferiamo a il modello come modello **SIS**. A parte la mancanza di uno stato R, la meccanica del modello segue il processo SIR.

- Inizialmente, alcuni nodi sono nello stato I e tutti gli altri sono nello stato S;
- Ogni nodo v che entra nello stato I rimane contagioso per un numero fisso di passi tI ;
- Durante ciascuno di questi passi tI , v ha una probabilità p di passare la malattia a ciascuno dei suoi vicini suscettibili;
- Dopo i passaggi tI , il nodo v non è più infetto e ritorna allo stato S.

La Figura 21.5 mostra un esempio del modello SIS che si sviluppa su una rete di contatti a tre nodi con $tI = 1$. Osserviamo come il nodo v inizia infetto, recupera e in seguito diventa infetto ancora una volta. Come con il modello SIR, il modello SIS può essere esteso per gestire tipi più generali di

ipotesi: diverse probabilità di contagio tra diverse coppie di persone o recupero probabilistico dalla malattia, in cui ogni nodo infetto transita verso il sensibile indicando con probabilità q ogni passo.

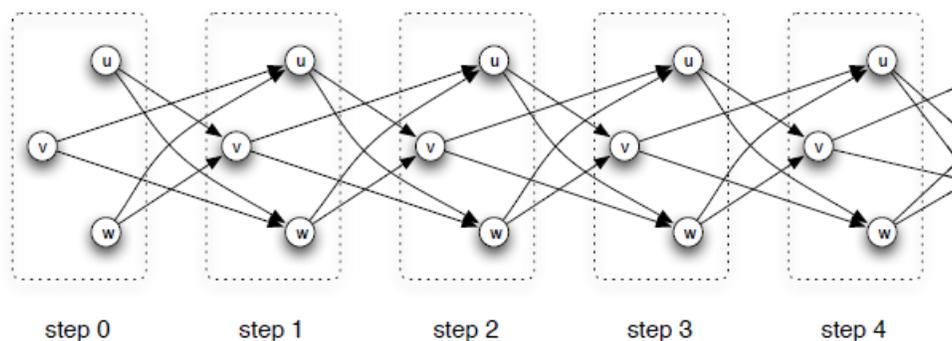
Cicli di vita delle epidemie SIR e SIS. Gli esempi in questa sezione e nelle precedenti suggeriscono che le "traiettorie" generali delle epidemie SIR e SIS su grafi a dimensione finita sono qualitativamente molto diversi. Un'epidemia SIR su un grafico finito va attraverso ad un numero limitato di nodi - poiché i nodi non possono mai essere reinfettati - e quindi è necessario giungere alla fine dopo un numero relativamente piccolo di passaggi. Un'epidemia di SIS, dall'altra mano, può essere eseguito per un tempo estremamente lungo mentre scorre attraverso gli stessi nodi. Ma come mostra la Figura 21.5 (e), se mai si arriva ad un punto in un'epidemia di SIS in cui tutti i nodi sono liberi dalla malattia, essa muore. Su un grafico finito, ci sarà alla fine (con probabilità 1) un punto nel tempo in cui tutti i tentativi di contagio allo stesso tempo falliscono, e a questo punto sarà finita.

Quindi con un'epidemia di SIS su una determinata rete di contatti è necessario capire per quanto tempo l'epidemia durerà e quante persone saranno colpite in momenti diversi. Per le reti di contatti in cui la struttura è matematicamente trattabile, i ricercatori hanno di fatto dimostrato risultati "taglienti" per il modello SIS simile alla nostra dicotomia per la ramificazione dei processi. Questi risultati, su particolari classi di reti di contatti, mostrano che in un particolare valore critico della probabilità di contagio p , un'epidemia di SIS sulla rete subirà un rapido spostamento da uno che si estingue rapidamente ad uno che persiste per un tempo molto lungo.

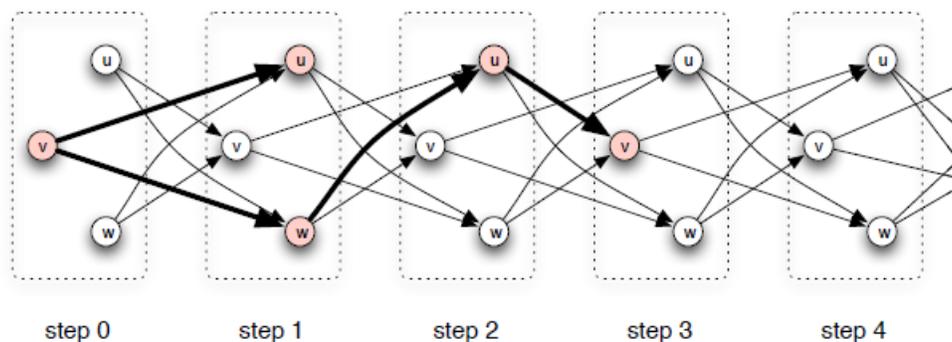
Una connessione tra le epidemie SIR e SIS. Nonostante le differenze tra i modelli SIR e SIS, è possibile rappresentare alcune delle varianti di base del SIS come casi speciali del modello SIR. Questa sorprendente relazione è un'ulteriore prova di flessibilità dei modelli epidemici di base, in cui i formalismi che sono definiti in modi diversi risultano avere connessioni molto strette l'una con l'altra.

Descriviamo la relazione per il modello SIS con $tI = 1$, quando ogni nodo è contagioso per un singolo passaggio prima del recupero. L'intuizione chiave è che se pensiamo a un nodo v come un "individuo diverso" ad ogni passo temporale, allora possiamo rappresentare le cose in modo che i nodi non vengano mai reinfettati. Specificamente, data un'istanza del modello SIS con $tI = 1$, creiamo una copia separata di ciascun nodo per ciascun passo temporale $t =$

0, 1, 2, 3 e successivi. Questa è la rete di contatti estesa nel tempo. Ora, per ciascun lato della rete di contatti originale, collegando un nodo v a un nodo w , creiamo bordi nella rete di contatti espansa nel tempo dalla copia di v al tempo t alla copia di w al tempo $t + 1$; questo semplicemente codifica l'idea che possiamo potenzialmente prendere la malattia al tempo $t + 1$ se v è infetto al tempo t . La figura 21.6 (a) mostra questa costruzione applicata alla rete di contatti di Figura 21.5.



(a) To represent the SIS epidemic using the SIR model, we use a “time-expanded” contact network



(b) The SIS epidemic can then be represented as an SIR epidemic on this time-expanded network.

Figure 21.6: An SIS epidemic can be represented in the SIR model by creating a separate copy of the contact network for each time step; a node at time t can infect its contact neighbors at time $t + 1$.

Il punto è che la stessa dinamica della malattia SIS che circolava in precedenza nella rete di contatti originale può ora scorrere in avanti nel tempo attraverso la rete estesa nel tempo, con copie di nodi che si trovano nello stato I al momento della produzione di nuove infezioni in copie di nodi al tempo

$t + 1$. Ma su questo grafico esteso nel tempo abbiamo un processo SIR, dal momento che qualsiasi copia di un nodo può essere considerata come rimossa (R) una volta che è passata la fase dell'infezione. Con questa visione del processo, abbiamo la stessa distribuzione di risultati del processo SIS originale. La Figura 21.6 (b) mostra il corso dell'epidemia SIR che corrisponde all'epidemia di SIS nella Figura 21.5.

Sincronizzazione. I modelli che abbiamo sviluppato ci forniscono un quadro per pensare a questioni più ampie nella diffusione della malattia. Guardiamo ora ad un problema correlato nelle dinamiche globali di una malattia - la tendenza delle epidemie per alcune malattie si sincronizzano su una popolazione, a volte producendo forti oscillazioni nel numero di persone colpite nel tempo.

Quando si guardano i dati sulla salute pubblica, è naturale osservare oscillazioni periodiche nel numero di casi di una malattia e provare a porre cause esterne per l'effetto. Recenti ricerche hanno dimostrato che le oscillazioni e la sincronizzazione nel tempo può infatti derivare in gran parte dalla dinamica di contagio della malattia stessa e che modelli simili possono essere creati nelle simulazioni dirette della malattia usando i tipi di modelli che abbiamo considerato qui.

Ora descriviamo come tali effetti possono essere prodotti utilizzando semplici modelli epidemici. Gli ingredienti cruciali sono una combinazione di immunità temporanea e legami a lungo raggio nella rete. I collegamenti a lungo raggio producono una ri-infettazione su parti disperse della rete; quando questi si placano, l'immunità temporanea produce un deficit a livello di rete nel numero e nella connettività di individui suscettibili, producendo una discesa della dimensione dell'epidemia, seguito da un picco. Descriviamo ora come rendere concreta questa immagine.

Il modello epidemico SIRS. Il primo passo nella produzione di un modello con oscillazioni è consentire alla malattia di conferire l'immunità temporanea ma non permanente sui soggetti infetti - una caratteristica di molte malattie reali. Per fare ciò, combiniamo elementi di SIR e SIS modelli in modo semplice, in modo che dopo che un nodo infetto si riprende, passa brevemente attraverso lo stato R sta tornando allo stato S. Chiamiamo il modello risultante il modello SIRS [267], poiché i nodi passano attraverso la sequenza S-I-R-S mentre l'epidemia procede. In dettaglio, il modello funziona come segue.

- Inizialmente, alcuni nodi sono nello stato I e tutti gli altri sono nello stato S;
- Ogni nodo v che entra nello stato I rimane contagioso per un numero fisso di passi tI ;
- Durante ciascuno di questi passi tI , v ha una probabilità p di passare la malattia a ciascuno dei suoi vicini suscettibili;
- (La nuova funzionalità del modello.) Dopo i passaggi tI , il nodo v non è più contagioso. Allora entra nello stato R per un numero fisso di passi tR . Durante questo periodo, non può essere infettato con la malattia, né trasmette la malattia ad altri nodi. Dopo i passaggi tR in Stato R, il nodo v ritorna allo stato S.

Per un'epidemia SIRS, il decorso della malattia attraverso una popolazione non è chiaramente influenzato solo per le quantità p e tI , ma anche per la lunghezza tR dell'immunità temporanea che è conferita.

Small-World Contact Networks. L'immunità temporanea può produrre oscillazioni in molte parti localizzate della rete, con patch di immunità a seguito di un numero elevato di infezioni in un'area concentrata. Ma per questo per produrre grandi fluttuazioni che possono essere viste al livello della rete completa, i picchi della malattia devono essere coordinate in modo che accadere all'incirca nello stesso momento in molti posti diversi. Un meccanismo naturale per produrre questo tipo di coordinamento è quello di avere una rete ricca di **connessioni a lungo raggio**.

Questo tipo di struttura è familiare dalla nostra discussione sulle proprietà dello small world nel Capitolo 20. Lì, abbiamo considerato i modelli di rete in cui molti link erano "locali" e cluster - nodi di collegamento con caratteristiche sociali e geografiche molto simili, secondo al principio di omofilia - mentre alcuni erano collegamenti a lungo raggio, corrispondenti a legami deboli che collegano parti molto diverse della rete. Nel capitolo 20 ci siamo concentrati su l'effetto che questo tipo di struttura ha sulle distanze tra i nodi.

Ma c'è una conseguenza correlata: i collegamenti a lungo raggio possono portare ciò che accade in una parte di la rete altrove, influenzando un'altra parte di rete. Si è mostrato come potrebbe portare naturalmente alla sincronizzazione e all'oscillazione nelle epidemie. Per la loro analisi loro hanno

costruito reti casuali con proprietà di piccolo mondo, in un modo molto simile alla costruzione grid-plus-random-edges discussa nel capitolo 20; invece della versione da quel capitolo, hanno seguito più da vicino la costruzione originale di Watts e Strogatz, producendo scorcioie casuali. In particolare, hanno iniziato con un grafico in cui i nodi sono disposti in un anello e ogni nodo è collegato ai suoi vicini per un certo numero di passaggi in ogni direzione. Questi sono tutti collegamenti omofili, che collegano i nodi che sono molto vicini tra loro sul ring. Quindi, con alcune probabilità c , hanno trasformato ogni spigolo in un legame debole ricablano un'estremità di esso in un nodo scelto in modo uniforme a caso. Quindi, la probabilità c controlla la frazione di collegamenti nel rete che funge da legami deboli a lungo raggio.

Quando il modello SIRS viene eseguito su questo tipo di rete, si trova un comportamento molto diverso in base al valore di c , come indicato nella Figura 21.7. Quando c è molto piccola, la trasmissione della malattia attraverso la rete avviene principalmente attraverso gli archi locali a corto raggio, e così via le riaccensioni della malattia in una parte della rete non sono mai coordinate con i picchi in altre parti. Man mano che c aumenta, questi picchi iniziano a sincronizzarsi, e dal momento che ogni esplosione produce un gran numero di nodi con immunità temporanea, c'è una discesa successiva poiché la malattia ha difficoltà a farsi strada attraverso il set più scarso di obiettivi disponibili. Per valori molto grandi di c (come $c = 0,9$ nella figura 21.7), ci sono onde chiare nel numero di individui infetti; per valori intermedi di c (come $c = 0,2$) si osservano interessanti effetti in cui il sistema raggiunge la sincronizzazione a livello di rete per un periodo, e quindi sembra cadere "fuori sincronia" per ragioni difficili da quantificare.

Questi risultati mostrano come dinamiche epidemiche abbastanza complesse possono derivare da semplici modelli di contagio e struttura di contatto.

Sincronizzazione in dati epidemici. È possibile studiare questi effetti empiricamente e valutare i modelli proposti utilizzando ampi registri di prevalenza della malattia che sono di molti anni fa. La prevalenza della sifilide mostra oscillazioni prominenti su un ciclo di 8-11 anni, mentre la gonorrea mostra molto poco nel modo di comportamento periodico. Eppure le due malattie influenzano simili popolazioni, e sono presumibilmente soggetti a forze sociali molto simili.

Ci sono molte altre direzioni in cui procede la ricerca sulla sincronizzazione epidemica, compresi i tentativi di modellare fenomeni temporali più complessi. Per esempio, i dati per alcune malattie come il morbillo mostrano

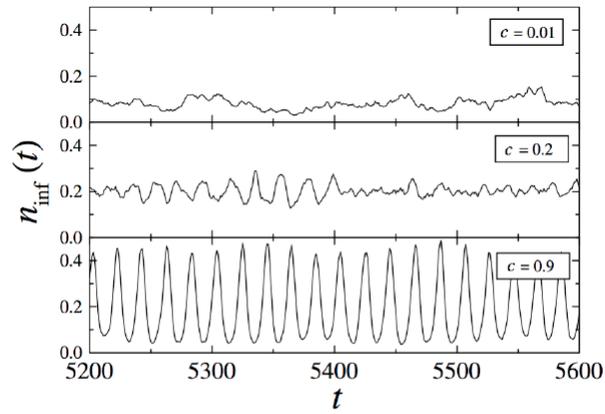


Figure 21.7: These plots depict the number of infected people over time (the quantity $n_{\text{inf}}(t)$ on the y -axis) by SIRS epidemics in networks with different proportions of long-range links. With c representing the fraction of long-range links, we see an absence of oscillations for small c ($c = 0.01$), wide oscillations for large c ($c = 0.9$), and a transitional region ($c = 0.2$) where oscillations intermittently appear and then disappear. (Results and image from [267].)

che le epidemie nelle diverse città possono essere sincronizzate in modo da essere fuori fase, con i picchi di una città che coincidono in modo coerente con discese nell'altro. Uno ha bisogno di più di semplici contatti a lungo raggio per spiegare tale proprietà.