Logica Matematica
2.1 – Insiemi

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Insiemi

In matematica è uso comune considerare delle collezioni di oggetti e queste collezioni si dicono **insiemi**. Sinonimi: **classe** o **famiglia**.

Per indicare che un **elemento** x appartiene ad un insieme A scriviamo

$$x \in A.$$

Se invece x non appartiene ad A scriviamo

$$x \notin A.$$

Un insieme è completamente determinato dai suoi elementi:

Principio di estensionalità

Due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi, ovvero

$$A = B \quad \text{se e solo se} \quad \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Insiemi

L'insieme formato dagli elementi $x_1, \ldots, x_n$ si indica con

$$\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Esempio

L'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ è $\{-1, 2, 3\}$.

Per il principio di estensionalità

$$\{-1, 2, 3\} = \{2, -1, 3\} = \{3, 2, 3, -1\}.$$

In altre parole: l'ordine in cui vengono elencati gli elementi di un insieme è irrilevante, e le eventuali ripetizioni non contano.

L'insieme di tutti gli x che godono della proprietà P è indicato con

$$\{x \mid P(x)\} \quad \text{oppure} \quad \{x : P(x)\}\,.$$

L'insieme degli x in A che soddisfano la proprietà P è indicato invece con

$$\{x \mid x \in A \text{ e } P(x)\} \quad \text{oppure} \quad \{x \in A \mid P(x)\}\,.$$

Esempio

Consideriamo la proprietà $P(x)$ data da

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

Allora l'insieme di tutti i numeri interi che godono della proprietà $P(x)$ è

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0\right\}.$$

Se invece $P(x)$ è la proprietà "essere un numero pari" possiamo scrivere

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è pari}\}\,.$$

Osservazione

Consideriamo i due insiemi visti prima

$$\{-1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0\right\}.$$

La descrizione dell'insieme a sinistra è data attraverso una lista esplicita dei suoi elementi, mentre la descrizione di quello a destra è data attraverso una proprietà $P(x)$ (essere soluzione dell'equazione $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$) che caratterizza quali numeri interi fanno parte dell'insieme.

Anche se le due descrizioni sono diverse, per il principio di estensionalità i due insiemi coincidono:

$$\{-1, 2, 3\} = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0\right\}.$$

L'insieme vuoto

Per definizione, un insieme è vuoto se non contiene elementi.

Osservazione

L'insieme vuoto è unico, ovvero: se A e B sono due insiemi che non contengono nessun elemento, allora per il principio di estensionalità

$$A = B.$$

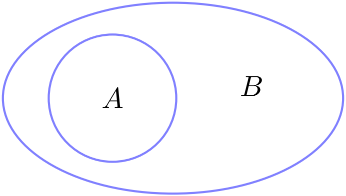
Infatti, A e B hanno gli stessi elementi (cioè nessuno), ovvero A e B verificano la formula

$$\forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

L'(unico!) insieme vuoto si indica con $\emptyset$.

Un insieme A è **contenuto** o **incluso** in un insieme B se ogni elemento di A è anche un elemento di B: in simboli, $A \subseteq B$. Quindi

$$A \subseteq B \text{ se e solo se } \forall x\, (x \in A \to x \in B).$$



In questo caso, diciamo che A è un **sottoinsieme** di B, oppure che B è un **sovrainsieme** di A.

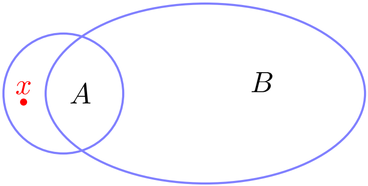
Attenzione!

Non confondere $\in$ con $\subseteq$. In italiano, il termine "contenere" è ambiguo perché si utilizza sia nel senso di appartenenza ("$\mathbb{N}$ contiene 1", inteso come "1 è un elemento di $\mathbb{N}$"), sia nel senso di inclusione ("$\mathbb{N}$ contiene i numeri pari", inteso come "l'insieme dei numeri pari è incluso in $\mathbb{N}$").

Chiaramente per ogni insieme A si ha che $A \subseteq A$ e, poiché $\emptyset$ non ha elementi, anche $\emptyset \subseteq A$.

$A \subset B$ (oppure $A \subsetneq B$) significa che A è un **sottoinsieme proprio** di B, ovvero $A \subseteq B$ ma $A \neq B$.

Osservazione: Per verificare che $A \nsubseteq B$ (ovvero che A *non* è un sottoinsieme di B) è sufficiente trovare un elemento $x \in A$ che non appartenga a B:



Dal principio di estensionalità si ottiene il

Principio di doppia inclusione

Dati due insiemi A e B, si ha che $A = B$ se e solo se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Descrizione informale dei principali insiemi numerici

L'insieme dei **numeri naturali** è

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{N}$ è contenuto propriamente nell'insieme dei **numeri interi**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Osservazione

Qui sopra stiamo estendendo la notazione che abbiamo introdotto per insiemi finiti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ad insiemi infiniti. I puntini indicano che l'elenco degli elementi prosegue indefinitamente in maniera "naturale". Ad esempio, possiamo indicare l'insieme dei numeri naturali pari con

$$\{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

Descrizione informale dei principali insiemi numerici

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei **numeri razionali** è l'insieme di tutti i numeri della forma

$$\frac{n}{m}$$

con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$. Ogni $k \in \mathbb{Z}$ può essere scritto come $\frac{k}{1}$ quindi $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ e poiché ci sono razionali che non sono interi (ad esempio $\frac{1}{2}$), l'inclusione è propria, cioè $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Descrizione informale dei principali insiemi numerici

Un razionale ha un'espansione decimale finita (per esempio $\frac{1}{2} = 0{,}5$) oppure un'espansione periodica (per esempio $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$). I numeri la cui espansione decimale è arbitraria (cioè finita, periodica o aperiodica) si dicono **numeri reali** e l'insieme dei numeri reali si denota con $\mathbb{R}$.

Chiaramente $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e l'inclusione è stretta (ovvero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) poiché, ad esempio, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Attenzione!

Alcuni numeri ammettono due espansioni decimali diverse: ad esempio $0,99999\ldots$ e 1 indicano lo stesso numero reale.

Insieme delle parti o insieme potenza

Definizione

L'**insieme delle parti** $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A (detto anche **insieme potenza** di A) è l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

$\mathcal{P}(A)$ è un insieme i cui elementi sono a loro volta insiemi!

Osservazioni: $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre $\emptyset$ e A come elementi, quindi è sempre non vuoto. Inoltre, se A è un insieme finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha esattamente 2^n elementi.

Esercizi

Descrivere $\mathcal{P}(A)$ dove $A = \{0, 1, 2\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Descrivere $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ con $A = \{1\}$

Si ha $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$, e quindi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{A\}, \{\emptyset, A\}\}$.

Esercizi

Inserire $\in$ oppure $\subseteq$ al posto dei puntini

$\emptyset \ldots \subseteq \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \ldots \subseteq \mathbb{N}$ $\quad$ $5 \ldots \in \mathbb{N}$ $\quad$ $\{5\} \ldots \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N} \ldots \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N} \ldots \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ $\quad$ $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ldots \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k$ per qualche $k\} \ldots \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k$ per qualche $k\}$

Esercizi

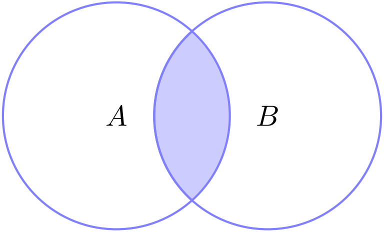
Quale delle seguenti affermazioni sono corrette?

1. $\emptyset \in A$ per ogni insieme A — FALSO
2. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ per ogni insieme A — VERO
3. $a \in \{\{a\}\}$ — FALSO
4. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ — FALSO
5. $\{a\} \in \{\{a\}\}$ — VERO
6. $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ — VERO
7. $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ — VERO
8. $\{0, 1, 2\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ — FALSO

Intersezione

L'**intersezione** di A e B, in simboli $A \cap B$, è l'insieme di tutti gli elementi che stanno sia in A che in B, cioè

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

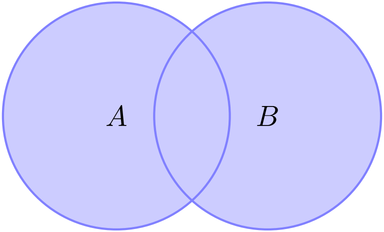


Due insiemi A e B si dicono **disgiunti** se non hanno alcun elemento in comune, ovvero se $A \cap B = \emptyset$.

Unione

L'**unione** di A e B, in simboli $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli enti che stanno in A o in B (o in entrambi gli insiemi), cioè

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



Unioni e intersezioni di famiglie arbitrarie

Le operazioni di unione e intersezione si possono generalizzare a famiglie di insiemi arbitrarie come segue.

Una famiglia arbitraria di insiemi è denotata da $\{A_i \mid i \in I\}$ — ad ogni indice $i \in I$ corrisponde un insieme A_i.

L'**unione** degli A_i è l'insieme degli enti che appartengono a *qualche* A_i

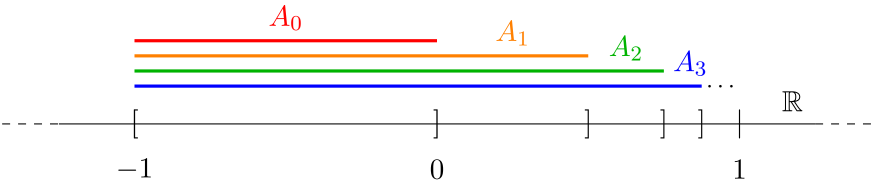
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \ (x \in A_i)\}$$

mentre l'**intersezione** degli A_i è l'insieme degli enti che appartengono ad *ogni* A_i

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \ (x \in A_i)\}.$$

Chiaramente $\bigcup_{i \in I} A_i$ contiene ogni A_j, mentre $\bigcap_{i \in I} A_i$ è contenuta in ogni A_j.

Consideriamo la famiglia $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di intervalli di $\mathbb{R}$ dove $A_n = [-1; 1 - 2^{-n}] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 - 2^{-n}\}$.



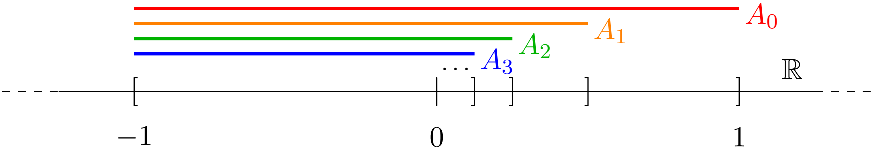
Allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1; 1) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$$

e

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1; 0] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\} = A_0.$$

Poniamo ora $A_n = [-1; 2^{-n}] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2^{-n}\}$.



Allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1; 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = A_0$$

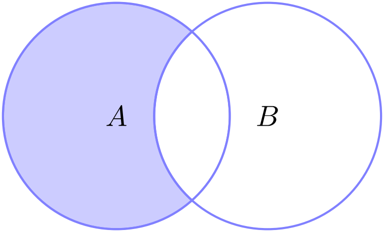
e

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [-1; 0] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}.$$

Differenza

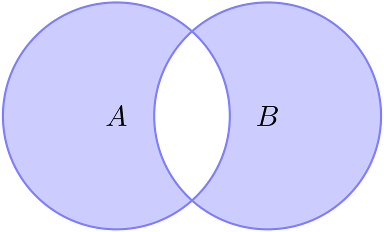
La **differenza** tra A e B, in simboli $A \setminus B$, è l'insieme di tutti gli enti che stanno in A ma non in B, cioè

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



La **differenza simmetrica** tra A e B, in simboli $A \triangle B$, è l'insieme di tutti gli enti che stanno in uno dei due insiemi ma non nell'altro, cioè

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$$\forall x \; (x \in A \triangle B \leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)))\,.$$

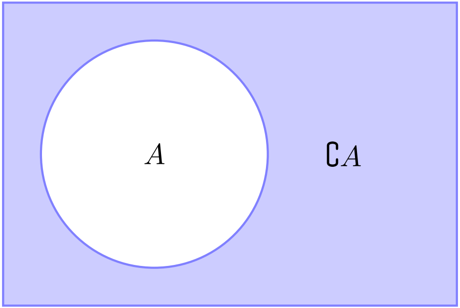
Inoltre,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Spesso è conveniente assumere che tutti gli insiemi/oggetti/enti di cui ci stiamo occupando siano contenuti in un insieme universale $\mathcal{U}$, detto appunto **universo**.

Fissiamo ora un universo $\mathcal{U}$. La differenza $\mathcal{U} \setminus A$ si dice **complementare** (o, più semplicemente, **complemento**) di A e lo si indica con $\complement A$. Quindi

$$\complement A = \{x \mid x \notin A\}.$$



Identità booleane per le operazioni insiemistiche

La logica proposizionale può essere utilizzata in maniera sistematica per verificare identità o inclusioni tra insiemi costruiti utilizzando le operazioni insiemistiche (finitarie) che abbiamo visto.

Dimostriamo che

$$\complement\complement A = A$$

Dobbiamo verificare che, qualunque sia A, valga la formula

$$\forall x\,(x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A).$$

Fissiamo quindi un generico x. Sfruttando la corrispondenza tra operazioni insiemistiche e connettivi logici visti in precedenza, la formula

$$x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A$$

diventa

$$\neg(\neg(x \in A)) \leftrightarrow x \in A.$$

Se ora nella formula

$$\neg(\neg(x \in A)) \leftrightarrow x \in A$$

sostituiamo l'affermazione "$x \in A$" con una corrispondente lettera proposizionale P otteniamo la formula proposizionale

$$\neg(\neg \mathrm{P}) \leftrightarrow \mathrm{P}.$$

In generale, il fatto che P sia vera o meno dipenderà naturalmente dalla scelta di A e x: ma noi vogliamo proprio dimostrare che l'equivalenza è vera in ogni caso (cioè comunque vengano presi A e x), ovvero che la proposizione precedente è una tautologia. Utilizzando le tavole di verità si verifica facilmente che questo è vero (legge della doppia negazione), quindi comunque siano presi A e x avremo che

$$x \in \complement\complement A \leftrightarrow x \in A,$$

da cui $\complement\complement A = A$, come desiderato.

Dimostriamo che

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in \complement(A \cup B) \leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B.$$

Utilizzando la corrispondenza tra operazioni insiemistiche e connettivi che abbiamo visto, la formula precedente diventa

$$\neg(x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B).$$

Questa è una proposizione della forma

$$\neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \leftrightarrow \neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$$

dove P e Q sono, rispettivamente, "$x \in A$" e "$x \in B$". Poiché tale proposizione è una tautologia (leggi di De Morgan), l'identità insiemistica è dimostrata.

Dimostriamo che

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in \complement(A \cap B) \leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B,$$

ovvero che

$$\neg(x \in A \land x \in B) \leftrightarrow \neg(x \in A) \lor \neg(x \in B).$$

Questa è una proposizione della forma

$$\neg(\mathrm{P} \land \mathrm{Q}) \leftrightarrow \neg\mathrm{P} \lor \neg\mathrm{Q},$$

dove P e Q sono, rispettivamente, "$x \in A$" e "$x \in B$". Poiché tale proposizione è una tautologia (leggi di De Morgan), l'identità insiemistica iniziale è dimostrata.

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

La stessa identità può anche essere dimostrata utilizzando ciò che abbiamo già dimostrato, ovvero che per tutti gli insiemi X e Y valgono $\complement\complement X = X$ e $\complement(X \cup Y) = \complement X \cap \complement Y$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\complement(A \cap B) &= \complement(\complement\complement A \cap \complement\complement B) \\
&= \complement\left(\complement\left(\complement A \cup \complement B\right)\right) \\
&= \complement\complement\left(\complement A \cup \complement B\right) \\
&= \complement A \cup \complement B
\end{aligned}$$

□

Dimostrare che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

ovvero

$$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C).$$

Questa è una proposizione della forma

$$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \leftrightarrow (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}),$$

dove P, Q e R sono, rispettivamente, "$x \in A$", "$x \in B$" e "$x \in C$". Poiché la proposizione precedente è una tautologia (come si può verificare facilmente con le tavole di verità), l'equivalenza è dimostrata.

Dimostrare che $\complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$

In questo caso non possiamo ricondurci alla logica proposizionale (a meno che I non sia finito) perché le operazioni $\bigcup_{i\in I}$ e $\bigcap_{i\in I}$ sono operazioni infinitarie (coinvolgono infiniti insiemi) mentre i connettivi sono operatori finitari (unari o binari). Dobbiamo quindi procedere con una dimostrazione *ad hoc*.

Dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in \complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \complement A_i.$$

In effetti $x \in \complement\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow \neg\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \leftrightarrow \neg(\exists i \in I\ (x \in A_i)) \leftrightarrow \forall i \in I\, \neg\left(x \in A_i\right) \leftrightarrow \forall i \in I\ (x \notin A_i) \leftrightarrow \forall i \in I\ \left(x \in \complement A_i\right) \leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \complement A_i$.

Attenzione! La negazione di $\exists i \in I\,(\dots)$, ovvero $\neg(\exists i \in I\,(\dots))$, è equivalente a $\forall i \in I\,\neg(\dots)$. Viceversa, $\neg(\forall i \in I\,(\dots))$ è equivalente a $\exists i \in I\,\neg(\dots)$.

Dimostrare che $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Poiché $X \setminus Y = X \cap \complement Y$, l'identità può essere riscritta come

$$(A \cup B) \cap \complement(A \cap B) = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A).$$

Quindi dobbiamo dimostrare che per ogni x

$$x \in (A \cup B) \cap \complement(A \cap B) \leftrightarrow x \in (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A),$$

ovvero

$$\begin{aligned}(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow \\ (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A)).\end{aligned}$$

Questa è una proposizione del tipo

$$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge \neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{P}).$$

Usando le tavole di verità si verifica che tale proposizione è una tautologia, quindi l'identità insiemistica proposta è corretta.

Lo stesso metodo può essere utilizzato anche per trovare controesempi quando una certa identità booleana non è valida.

Dimostrare (trovando un controesempio) che **non** vale l'identità

$$A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

Dato un generico x, dobbiamo verificare che non è vero in generale che

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C),$$

ovvero

$$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C).$$

Questa è una proposizione del tipo

$$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \leftrightarrow \mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}),$$

dove P, Q e R sono, rispettivamente, "$x \in A$", "$x \in B$" e "$x \in C$".

La tavola di verità di tale proposizione è

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**

Poiché la proposizione non è una tautologia, l'identità *non* è valida. Ad esempio, l'identità risulta falsa quando ci troviamo nella situazione descritta dalla quarta riga. Dunque un controesempio può essere costruito considerando un A che contenga almeno un elemento x che non compare né in B né in C: in tale situazione si avrà infatti $x \in A \cup (B \cap C)$ ma $x \notin A \cap (B \cup C)$, da cui $A \cap (B \cup C) \neq A \cup (B \cap C)$. In maniera analoga si può ottenere un (diverso) controesempio dalla quinta riga.

Il prodotto cartesiano

Definizione

Il **prodotto cartesiano** di A e B, in simboli $A \times B$, è l'insieme di tutte le **coppie ordinate** (x, y) dove $x \in A$ e $y \in B$, cioè

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\} .$$

Osserviamo che, a differenza degli insiemi, nelle coppie ordinate l'ordine è fondamentale, cioè (x, y) è un oggetto diverso da (y, x), *a meno che* x *non sia* y.

Quindi $A \times B$ è distinto da $B \times A$ se $A \neq B$. Se invece $A = B$, allora $A \times B = B \times A$: in questo caso, tale prodotto cartesiano viene indicato con A^2.

Esempio

L'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'usuale piano cartesiano, i cui elementi sono identificati da coppie ordinate di numeri reali (le *coordinate*).

Più in generale, se $n \geq 1$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

indica la **n-upla** ordinata costituita dagli elementi $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Attenzione!

A differenza di quel che accade per gli insiemi, nelle n-uple ordinate contano sia l'ordine che eventuali ripetizioni.

Il **prodotto cartesiano** degli insiemi $A_0, \ldots, A_{n-1}$, denotato con

$$A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1},$$

è l'insieme delle n-uple $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ tali che $x_i \in A_i$ per ogni $0 \leq i < n$.

Il prodotto cartesiano $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$ di n copie dell'insieme A, ovvero l'insieme delle n-uple $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ tali che $x_i \in A$ per ogni $0 \leq i < n$, si indica più brevemente con A^n e viene detto **potenza n-esima di A**. Per convenzione, si pone anche $A^0 = \{\emptyset\}$.