

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: _____

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

- (a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti
- $\{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \text{lh}(s) = 3 \wedge s(2) = 1\}$
 - $\{s \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \mid \text{lh}(s) = 3 \wedge s(2) = 1\}$
 - $\{s \in \mathbb{N}^3 \mid s(2) = 1\}$
 - $\{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s(2) = 1\}$
- (b) Sia R la relazione “non essere consecutivi” sui numeri naturali. 2 punti
Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
- La relazione R è riflessiva.
 - La relazione R è simmetrica.
 - La relazione R è transitiva.
 - La relazione R è un pre-ordine.
- (c) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x, z)$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti
- φ non è un enunciato.
 - Alcuni termini che occorrono in φ hanno altezza 1.
 - L'altezza di φ è 2.
 - L'insieme delle variabili libere di φ è vuoto.
- (d) Sia P una tautologia, Q una contraddizione e R un'arbitraria formula proposizionale. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti
- $P \leftrightarrow \neg Q$ è una tautologia.
 - $Q, R \models P$.
 - $Q \models P \wedge R$.
 - Se $P \models R$ allora R è una tautologia.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2

6 punti

Utilizzando la logica proposizionale, dimostrare che per ogni coppia di insiemi A e B vale l'inclusione

$$\mathbb{C}A \cup B \subseteq \mathbb{C}(A \Delta B) \cup \mathbb{C}A.$$

Esercizio 3

6 punti

1. Formalizzare in \mathbb{Z} la frase

x e y sono numeri consecutivi

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $<$ interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$ e $+$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in \mathbb{Z} la frase

Se due numeri sono consecutivi, almeno uno dei due è pari.

Esercizio 4

6 punti

Sia $L = \{P, f, a\}$ con P simbolo di relazione unaria, f simbolo di funzione binaria e a simbolo di costante. Sia φ la formula

$$P(x) \wedge \exists y(f(y, a) = x).$$

Determinare l'insieme di verità di φ in ciascuna delle seguenti L -strutture:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, \cdot, 2 \rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è l'insieme dei numeri primi.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, P^{\mathcal{B}}, \cdot, 0 \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}}$ è l'insieme dei numeri non negativi.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 5

6 punti

Sia a_n , $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 1.$$