Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 10 Luglio 2013

SOLUZIONI

Esercizio 1. Vero o falso? Se $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\omega} X_i$ allora almeno uno degli X_i ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.

Soluzione. Vero. Se tutti gli X_i avessero cardinalità $< |\mathbb{R}|$ la loro unione, per il teorema di König, avrebbe cardinalità minore di $\Pi_{i\in\omega}|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. □

Esercizio 2. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice periodica se esiste un intero positivo k tale che $f(x + k) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

1. Determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni periodiche.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni non periodiche.

Soluzione. 1. L'insieme delle funzioni periodiche sono $\aleph_0$ in quanto è l'unione su k dell'insieme delle funzioni k-periodiche, che a loro volta sono $\aleph_0$ in quanto in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}^k$.

2. Le funzioni non periodiche sono tante quante tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$, ovvero $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph}_0$. Ciò segue dal fatto che se tolgo da un insieme un insieme di cardinalità strettamente più piccola la cardinalità non cambia. □

Esercizio 3. Sia $(I, <)$ un insieme ordinato, e sia $(X_i : i \in I)$ una famiglia di insiemi tali che per ogni $i < j$ in I si abbia $X_i \subseteq X_j$.

1. Supponiamo che $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$ e che $|Y| < |I|$. Ne segue che esiste $i \in I$ tale che $Y \subseteq X_i$?
2. E nel caso in cui $I = \mathbb{R}$ con l'usuale ordine?
3. E nel caso in cui $I = \aleph_1$ con l'usuale ordinamento sugli ordinali?
4. Enunciate una condizione su $|Y|$ ed $(I, <)$, il più generale possibile, che garantisca una risposta positiva alla prima domanda.

Soluzione. 1. No. Gli interi sono contenuti nell'unione su $n \in \mathbb{N}$ delle semirette $(-\infty, n] \subseteq \mathbb{R}$, ma non sono contenuti in nessuna di tali semirette.

2. No, per ragioni simili (basta prendere gli estremi delle semirette in $\mathbb{R}$).

3. Si, segue dal prossimo punto.

4. Basta che la cofinalità di $(I, <)$ sia maggiore di $|Y|$. Infatti dato $y \in Y$, sia $i(y) \in I$ tale che $y \in X_{i(y)}$. Per le ipotesi, la funzione $y \mapsto i(y)$ non può essere cofinale. Dunque esiste un $i \in I$ che maggiora tutti gli $i(y)$ e per tale i si ha $Y \subseteq X_i$. □

Esercizio 4. Vero o falso? Sia X l'insieme dei sottoinsiemi illimitati superiormente di $\aleph_2$. Allora $|X| = 2^{\aleph_2}$.

Soluzione. Si. Osserviamo innanzitutto che un sottoinsieme di $\aleph_2$ è illimitato se e solo se ha cardinalità $\aleph_2$. Inoltre $\aleph_2$ ha la stessa cardinalità del prodotto cartesiano $\aleph_2 \times \aleph_2$. Basta quindi esibire una funzione iniettiva $f : \mathcal{P}(\aleph_2) \to \mathcal{P}(\aleph_2 \times \aleph_2)$ dall'insieme delle parti di $\aleph_2$ (che ha cardinalità $2^{\aleph_2}$) a quello di $\aleph_2 \times \aleph_2$, che assume come valori solo insiemi di cardinalità $\aleph_2$. A tal fine, dato $X \subseteq \aleph_2$, basta porre $f(X) = X \times \aleph_2 \subseteq \aleph_2 \times \aleph_2$. $\square$

Esercizio 5. Vero o falso? Per ogni ordinale infinito α, $(\alpha + 1)^\omega = \alpha^\omega$ (come esponenziazione ordinale, non cardinale).

Soluzione. Si. Per evitare errori bisogna fare attenzione al fatto che la somma e l'addizione sugli ordinali non sono commutative e che la distributività vale solo in un senso. Dimostriamo la disuguaglianza $\leq$ (l'altra essendo banale). Abbiamo $(\alpha + 1) \leq \alpha + \alpha = \alpha \cdot 2 \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$. Ne segue che $(\alpha + 1)^\omega \leq \alpha^{2 \cdot \omega}$ e concludiamo osservando che $2 \cdot n = \sup_{n \in \omega} 2 \cdot \omega = \omega$.

$\square$