

# Branch-and-Bound

Un altro approccio al problema del commesso viaggiatore

A.A. 2016-2017

### Altra soluzione branch & bound

La seguente soluzione si applica a grafi completi orientati.

La scelta avviene sempre tra le città (branch); il lower bound del costo viene definito usando la matrice dei costi ridotta.

Una riga (colonna) di una matrice è ridotta se e solo se contiene almeno uno 0 e gli altri elementi sono non negativi.

Una matrice è ridotta se ogni riga e ogni colonna è ridotta.

L'uso di matrici ridotte per trovare una limitazione inferiore al costo di ogni vertice si basa sulla seguente osservazione:

sottrarre una costante  $t$  agli elementi di una colonna o di una riga riduce la lunghezza di ogni giro esattamente di  $t$ .

## Branch & Bound: commesso viaggiatore

Per ottenere una matrice ridotta si sottrae il minimo di ogni riga a tutti gli elementi della riga e analogamente per le colonne, in modo da ottenere almeno uno zero in ogni riga e in ogni colonna.



si riduce la lunghezza di ogni ciclo di  $r$



Ogni ciclo non puo` costare meno di  $r$



$r$  e` un lower bound della lunghezza di un ciclo di costo minimo

## Branch & Bound: commesso viaggiatore

Esempio di riduzione di una matrice.  $L$  è la quantità totale sottratta.

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

(a) Cost Matrix

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

(b) Reduced Cost Matrix  
 $L = 25$

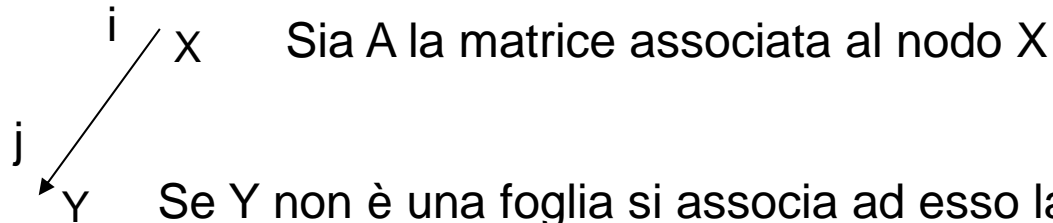
Osservazione: ogni giro include un arco  $\langle i,k \rangle$  e un arco  $\langle k,j \rangle$  ( $1 \leq k \leq n$ ), cioè per ogni vertice  $v_i$  è esattamente un arco entrante e un arco uscente.

Ad ogni nodo nello spazio degli stati associamo una matrice e una stima del costo nel modo seguente:

- alla radice dell'albero che descrive lo spazio degli stati viene associata una matrice ridotta e come costo stimato la quantità sottratta per ottenere dalla matrice dei costi la matrice ridotta.

## Branch & Bound: commesso viaggiatore

- ad ogni altro vertice si associano la matrice e il rango nel modo seguente:



Se  $Y$  non è una foglia si associa ad esso la matrice  $B$  ottenuta da  $A$  in questo modo:

1. Cambia la riga  $i$  e la colonna  $j$  a  $\infty$  (impedisce di usare un altro arco che entra in  $j$  o esce da  $i$ )
2.  $A[j, 1] = \infty$  per impedire di tornare alla città iniziale
3. Riduci le righe e le colonne eccetto quelle che contengono solo  $\infty$ .

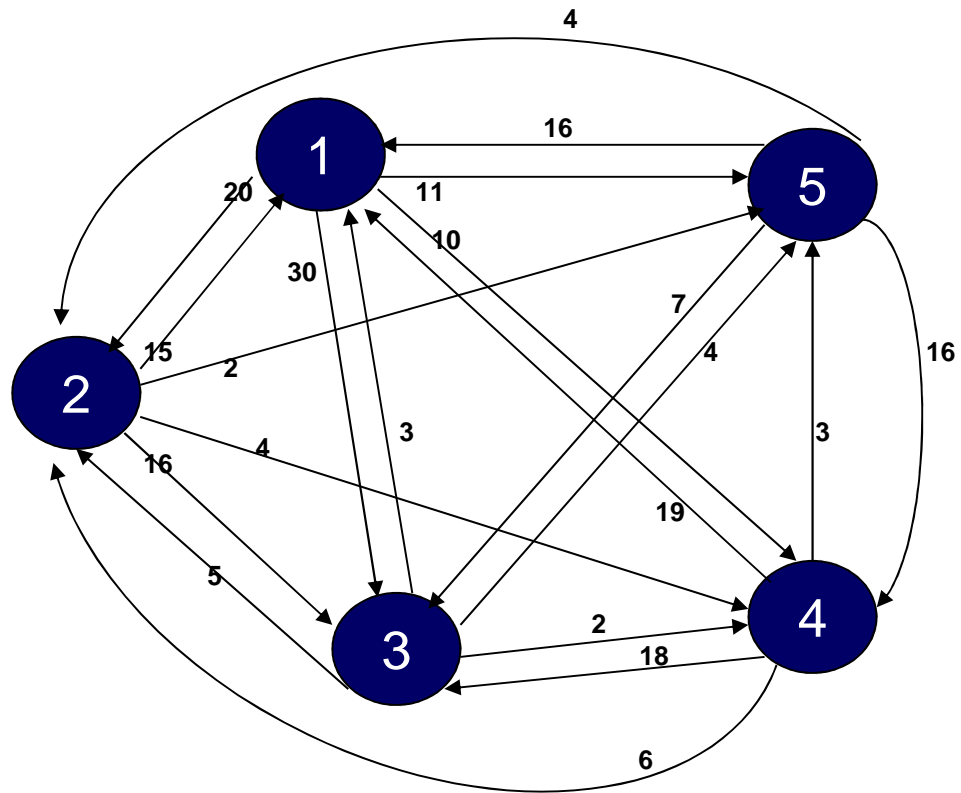
Se  $r$  è la quantità sottratta in 3,  $c^s(Y) = c^s(X) + A[i, j] + r$

Per le foglie  $c^s(.) = c(.)$

Come si può usare inizialmente  $\infty$  per tutti i nodi, da aggiornare ogni volta che viene trovata una soluzione più conveniente.

# Branch & Bound: commesso viaggiatore

$\infty$	20	30	10	11
15	$\infty$	16	4	2
3	5	$\infty$	2	4
19	6	18	$\infty$	3
16	4	7	16	$\infty$



# Branch & Bound: commesso viaggiatore

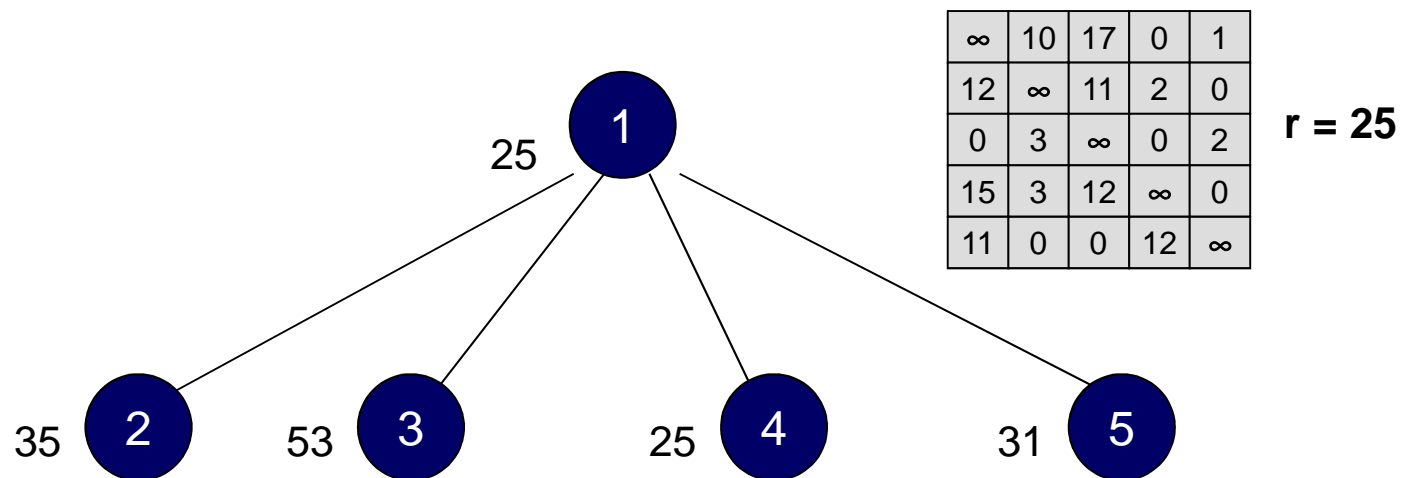
$\infty$	20	30	10	11
15	$\infty$	16	4	2
3	5	$\infty$	2	4
19	6	18	$\infty$	3
16	4	7	16	$\infty$

$\infty$	10	17	0	1
12	$\infty$	11	2	0
0	3	$\infty$	0	2
15	3	12	$\infty$	0
11	0	0	12	$\infty$

**r = 25**



# Branch & Bound: commesso viaggiatore



$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	11	2	0
0	$\infty$	$\infty$	0	2
15	$\infty$	12	$\infty$	0
11	$\infty$	0	12	$\infty$

**1 → 2: r = 0**

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$\infty$	2	0
$\infty$	3	$\infty$	0	2
4	3	$\infty$	$\infty$	0
0	0	$\infty$	12	$\infty$

**1 → 3: r = 11**

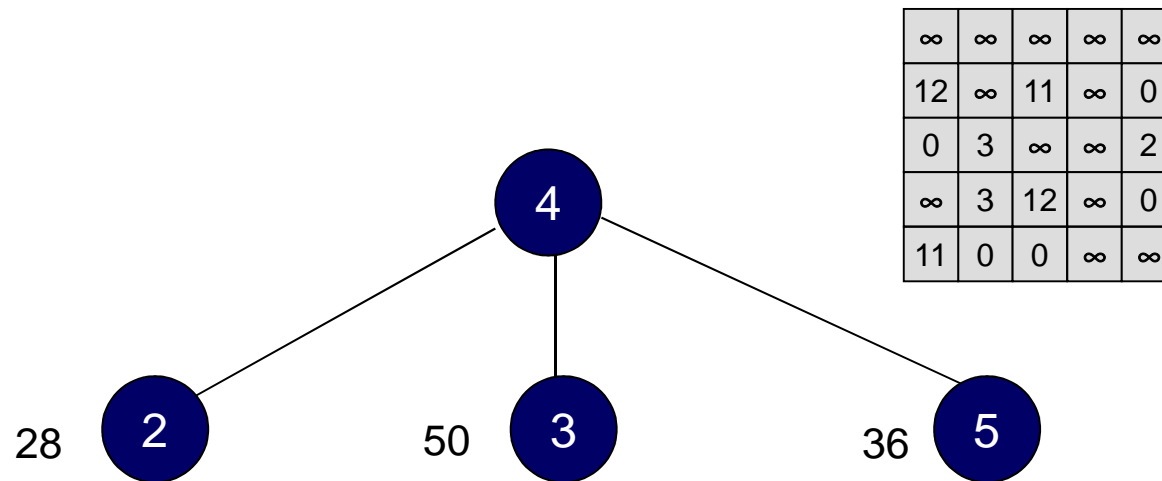
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
12	$\infty$	11	$\infty$	0
0	3	$\infty$	$\infty$	2
$\infty$	3	12	$\infty$	0
11	0	0	$\infty$	$\infty$

**1 → 4: r = 0**

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
10	$\infty$	9	0	$\infty$
0	3	$\infty$	0	$\infty$
12	0	9	$\infty$	$\infty$
$\infty$	0	0	12	$\infty$

**1 → 5: r = 5**

# Branch & Bound: commesso viaggiatore



$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
12	$\infty$	11	$\infty$	0
0	3	$\infty$	$\infty$	2
$\infty$	3	12	$\infty$	0
11	0	0	$\infty$	$\infty$

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	11	$\infty$	0
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
11	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

**1 → 4 → 2: r = 0**

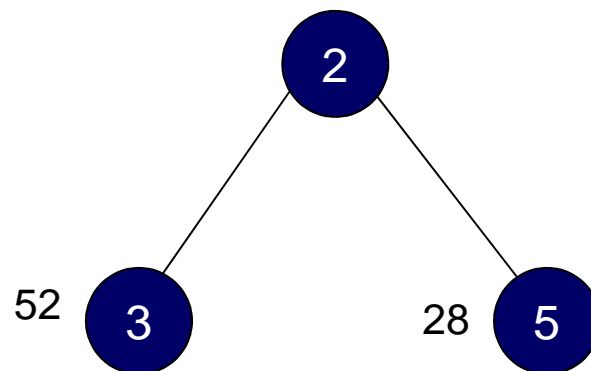
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	0
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$

**1 → 4 → 3: r = 13**

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
0	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	0	0	$\infty$	$\infty$

**1 → 4 → 5: r = 11**

# Branch & Bound: commesso viaggiatore



$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	11	$\infty$	0
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
11	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

**1 → 4 → 2 → 3: r = 13**

$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$

**1 → 4 → 2 → 5: r = 0**

# Branch & Bound: commesso viaggiatore

