Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 10 Luglio 2013

COGNOME E NOME

Esercizio 1. Vero o falso? Se $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \omega} X_i$ allora almeno uno degli X_i ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice periodica se esiste un intero positivo k tale che $f(x + k) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

1. Determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni periodiche.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme delle funzioni non periodiche.

Esercizio 3. Sia $(I, <)$ un insieme ordinato, e sia $(X_i : i \in I)$ una famiglia di insiemi tali che per ogni $i < j$ in I si abbia $X_i \subseteq X_j$.

1. Supponiamo che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ e che $|Y| < |I|$. Ne segue che esiste $i \in I$ tale che $Y \subseteq X_i$?
2. E nel caso in cui $I = \mathbb{R}$ con l'usuale ordine?
3. E nel caso in cui $I = \aleph_1$ con l'usuale ordinamento sugli ordinali?
4. Enunciate una condizione su $|Y|$ ed $(I, <)$, il più generale possibile, che garantisca una risposta positiva alla prima domanda.

Esercizio 4. Vero o falso? Sia X l'insieme dei sottoinsiemi illimitati superiormente di $\aleph_2$. Allora $|X| = 2^{\aleph_2}$.

Esercizio 5. Vero o falso? Per ogni ordinale infinito α, $(\alpha + 1)^\omega = \alpha^\omega$ (come esponenziazione ordinale, non cardinale).