Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prof. A. Berarducci
Prova scritta del 17 Gennaio 2013

COGNOME E NOME
MATRICOLA

Si possono assumere tutti gli assiomi della teoria degli insiemi visti a lezione.

Esercizio 1. Vero o falso? Consideriamo il cardinale $2^{\aleph_0}$ (visto come ordinale iniziale) e sia $X \subseteq 2^{\aleph_0}$. Possiamo dire che o X o il suo complemento $2^{\aleph_0} \setminus X$ ha tipo d'ordine $2^{\aleph_0}$?

Soluzione: Vero. La somma di due cardinali infiniti è il massimo dei due, quindi X o il suo complemento ha cardinalità $2^{\aleph_0}$. Ma avendo cardinalità $2^{\aleph_0}$ ed essendo incluso in $2^{\aleph_0}$ deve avere tipo d'ordine $2^{\aleph_0}$, altrimenti avrebbe tipo d'ordine più grande e un suo segmento iniziale proprio avrebbe tipo d'ordine $2^{\aleph_0}$, cosa impossibile in quanto ogni sottoinsieme limitato di $2^{\aleph_0}$ ha cardinalità strettamente più piccola. $\square$

Esercizio 2. Determinare il minimo ordinale $\alpha > 0$ tale che per ogni funzione debolmente crescente $f : \mathbb{R} \to \alpha$, l'immagine di f è limitata. (Qui $\mathbb{R}$ ha l'usuale ordine dei numeri reali, non è né un cardinale né un ordinale.)

Soluzione: L'ordinale cercato è ω_1. Se esistesse una funzione debolmente crescente ed illimitata $f : \mathbb{R} \to \omega_1$, la sua restrizione ad $\mathbb{N}$ sarebbe illimitata, contraddicendo il fatto che ω_1 ha cofinalità maggiore di ω. D'altra parte se $0 < \alpha < \omega_1$, allora esiste una funzione debolmente crescente illimitata $f : \mathbb{N} \to \alpha$ (vedi sotto) che si può estendere ad $\mathbb{R}$ componendo con la funzione parte intera. Per dimostrare l'esistenza della f, si consideri prima una $g : \mathbb{N} \to \alpha$ surgettiva, e poi si definisca induttivamente $f(x)$ come il minimo ordinale maggiore o uguale a $g(x)$ e a tutti gli ordinali $f(n)$ con $n < x$. $\square$

Esercizio 3. Determinare il minimo ordinale $\alpha > 0$ tale che per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \alpha$ (non necessariamente crescente), l'immagine di f è limitata.

Soluzione: L'ordinale cercato è $(2^{\aleph_0})^+$. Siccome ogni cardinale successore è regolare non esistono funzioni illimitate da $2^{\aleph_0}$ a $(2^{\aleph_0})^+$, e quindi nemmeno da $\mathbb{R}$ a $(2^{\aleph_0})^+$ (altrimenti potrei comporre con una bigezione da $\mathbb{R}$ a $2^{\aleph_0}$ osservando che l'illimitatezza si preserva in quanto l'immagine rimane invariata). $\square$

Esercizio 4. Vero o falso? Esiste un insieme non vuoto A tale che $A \times A \subseteq A$?

Soluzione: Si. Un esempio è l'insieme V_ω degli insiemi ereditariamente finiti. $\square$

Esercizio 5. Vero o falso? Esiste un insieme non vuoto A tale che $A \subseteq A \times A$?

Soluzione: No (assumendo l'assioma di fondazione). Altrimenti considero un elemento x di A di rango minimo. Se valesse l'inclusione lo potrei scrivere nella forma $x = \langle a, b \rangle$, con $a, b \in A$. Ciò è assurdo in quanto a, b hanno rango minore di x. $\square$

Esercizio 6. Vero o falso? Sia a un ordinale tale che $\omega^a = a$ (esponenziazione ordinale, non cardinale). Possiamo concludere che per ogni $x, y < a$ si ha $x + y < a$? (somma ordinale)

Soluzione: Si. Osservo che a è un ordinale limite essendo della forma ω^a. Dati $x, y < a$, li posiamo dunque limitare con ω^t per qualche $t < a$. Mi basta dunque dimostrare che per ogni $t < a$ si ha $\omega^t + \omega^t < \omega^a$. Ma $\omega^t + \omega^t = \omega^t \cdot 2 \leq \omega^t \omega = \omega^{t+1} < \omega^a$. $\square$