

Logica Matematica

6.1 – Strutture

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Consideriamo un generico linguaggio del prim'ordine

$$L = \text{Const} \cup \text{Func} \cup \text{Rel}.$$

Il nostro obiettivo è quello di definire opportune nozioni di **modello** (= L -**struttura**) \mathcal{A} e di **interpretazione** in \mathcal{A} di termini e formule di L .

L-strutture

Una *L*-**struttura** \mathcal{A} consiste di

- un insieme non vuoto, detto **universo** o **dominio** della struttura, generalmente indicato con $|\mathcal{A}|$ o anche con la medesima lettera usata per la struttura, ma in carattere tondo, in questo caso A ;
- un'**interpretazione** in \mathcal{A} di ogni simbolo di L , definita come segue:
 - ▶ se $R \in \text{Rel}$ è un simbolo relazionale n -ario, la sua interpretazione $R^{\mathcal{A}}$ in \mathcal{A} è una relazione n -aria su A , cioè

$$R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}}$$

- ▶ se $f \in \text{Func}$ è un simbolo funzionale n -ario, allora

$$f^{\mathcal{A}}: A^n \rightarrow A,$$

cioè $f^{\mathcal{A}}$ è una funzione n -aria con argomenti e valori in A ;

- ▶ se $c \in \text{Const}$ è un simbolo di costante, la sua interpretazione in \mathcal{A} consiste di un elemento

$$c^{\mathcal{A}} \in A.$$

Se $\text{Rel} = \{R_1, R_2, \dots\}$, $\text{Func} = \{f_1, f_2, \dots\}$ e $\text{Const} = \{c_1, c_2, \dots\}$, la L -struttura \mathcal{A} sarà denotata con

$$\langle A, R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}}, \dots, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \dots, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle.$$

Esempi di L -strutture (1)

Vediamo alcuni esempi di L -strutture, dove $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario.

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Si tratta della struttura con dominio \mathbb{N} e in cui il simbolo di relazione binario P viene interpretato nella relazione binaria \leq su \mathbb{N} , in simboli

$$P^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}.$$

- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}} \rangle$ dove $P^{\mathcal{B}}$ è la relazione di congruenza modulo 3 su \mathbb{N} . Dunque \mathcal{B} è la struttura con dominio \mathbb{N} in cui il simbolo di relazione binario P viene interpretato nella relazione binaria su \mathbb{N}

$$P^{\mathcal{B}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \equiv m \pmod{3}\}.$$

- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$.
- $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Z}, P^{\mathcal{D}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{D}}$ è la relazione di congruenza modulo 3 su \mathbb{Z} .

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario. Come negli esempi precedenti, per definire una L -struttura bisogna specificare:

- 1 il suo dominio, che deve essere un insieme non vuoto X ;
- 2 una qualche relazione binaria R su X .

Ogni coppia del tipo $\langle X, R \rangle$ che soddisfi queste due condizioni è una L -struttura, indipendentemente dalle eventuali proprietà particolari di X e/o R . Inoltre, cambiando il dominio e/o la relazione binaria su di esso, si ottengono L -strutture diverse.

Quindi anche i seguenti sono esempi di L -strutture.

- $\mathcal{E} = \langle X, R \rangle$ dove X è l'insieme dei residenti del comune di Torino e $R \subseteq X \times X$ è la relazione definita da "a R b se e solo se a è figlio di b", in simboli

$$R = \{\langle a, b \rangle \in X \times X \mid a \text{ è figlio di } b\}.$$

- $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d)\} \rangle,$
- $\mathcal{G} = \langle \{a, b\}, \emptyset \rangle$
- ...

Esempi di L -strutture (2)

Sia ora $L = \{Q\}$ con Q simbolo di relazione unario. In questo caso una L -struttura $\mathcal{A} = \langle A, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ è data da un insieme non vuoto A (il suo dominio) e da una relazione unaria $Q^{\mathcal{A}}$ su A , ovvero da un sottoinsieme $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A^1$. Poiché A^1 è identificato con A stesso, la relazione unaria $Q^{\mathcal{A}}$ non è altro che un qualche sottoinsieme del dominio di \mathcal{A} .

Sono dunque esempi di L -struttura:

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \mathbb{N} \rangle$
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è un numero primo} \}$
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}, \emptyset \rangle$
- $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Q}, \{\frac{1}{2}, -3, \frac{4}{5}\} \rangle$
- $\mathcal{E} = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R} \rangle$
- ...

Esempi di L -strutture (3)

Sia ora $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Le seguenti sono L -strutture:

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dove \mathbb{Z} è il dominio di \mathcal{A} e la somma interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m$ per ogni $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$).
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ dove \mathbb{N} è il dominio di \mathcal{B} e la somma interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{B}}(n, m) = n + m$ per ogni $(n, m) \in \mathbb{N}^2$).
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ dove \mathbb{Q} è il dominio di \mathcal{C} e il prodotto interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{C}}(r, q) = r \cdot q$ per ogni $(r, q) \in \mathbb{Q}^2$).

Più in generale, per definire una L -struttura bisogna specificare:

- 1 il suo dominio, che deve essere un insieme non vuoto X ;
- 2 una qualche funzione binaria $g: X^2 \rightarrow X$.

Ogni coppia del tipo $\langle X, g \rangle$ che soddisfi queste due condizioni è una L -struttura, indipendentemente dalle proprietà particolari di X e/o g .

$L = \{f\}$ con f simbolo di relazione binario. Altri esempi di L -strutture sono:

- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è l'insieme dei numeri reali non nulli
- $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove \mathbb{R}^+ è l'insieme dei numeri reali maggiori di 0
- $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$, dove $\mathbb{Z}_3 = \{[n]_3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è l'insieme delle classi di resto modulo 3
- $\langle \{a, b, c\}, F \rangle$, dove

$$F: (\{a, b, c\})^2 \rightarrow \{a, b, c\}, \quad (x, y) \mapsto x$$

è la funzione che assegna ad ogni coppia la sua prima componente

- ...

NON è invece una L -struttura la coppia $\langle \mathbb{N}, - \rangle$, perché la sottrazione non è una funzione da \mathbb{N}^2 in \mathbb{N} (non è definita per tutte le coppie di numeri naturali).

Esempi di L -strutture (4)

Sia $L = \{P, f, c\}$ un linguaggio con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Le seguenti sono L -strutture.

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 0 \rangle$ dove $P^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \leq m\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ interpreta il simbolo di relazione binario P ,

$$f^{\mathcal{A}}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (n, m) \mapsto n + m$$

interpreta il simbolo di funzione binario f e $c^{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{Z}$ interpreta il simbolo di costante c .

- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, <, \cdot, 100 \rangle$ dove $P^{\mathcal{B}}$ è la relazione di minore stretto $<$, $f^{\mathcal{B}}$ è la moltiplicazione tra numeri interi e $c^{\mathcal{B}}$ è il numero intero 100.
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}, \geq, \cdot, -\sqrt{2} \rangle$ dove $P^{\mathcal{C}}$ è \geq , $f^{\mathcal{C}}$ è la moltiplicazione tra numeri reali e $c^{\mathcal{C}}$ è il numero reale $-\sqrt{2}$.
- ...

Alcune precisazioni e osservazioni

È possibile che $c_i^{\mathcal{A}} = c_j^{\mathcal{A}}$, anche se i simboli di costante sono distinti.

Analogamente, se i simboli di predicato R_i e R_j o i simboli di funzione f_i e f_j hanno la stessa arietà, è possibile che $R_i^{\mathcal{A}} = R_j^{\mathcal{A}}$ o che $f_i^{\mathcal{A}} = f_j^{\mathcal{A}}$.

Esempio

Se $L = \{P, Q, a, b\}$ con P e Q simboli di relazione binari e a, b simboli di costante, è legittimo considerare la L -struttura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, \leq, 0, 0 \rangle,$$

ovvero la struttura con dominio A e tale che

$$P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$$

e

$$a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}} = 0.$$

Alcune precisazioni e osservazioni

Per convenzione, se i simboli di un linguaggio L sono elencati in un determinato ordine, allora anche le relazioni/funzioni/costanti che li interpretano in una data struttura vanno presentati nello stesso ordine.

Esempio

Se $L = \{P, f, g, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, allora dire che

$$\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 3 \rangle$$

è una L -struttura significa che \mathbb{R} è il dominio della struttura, $<$ è l'interpretazione di P ,

Alcune precisazioni e osservazioni

Per convenzione, se i simboli di un linguaggio L sono elencati in un determinato ordine, allora anche le relazioni/funzioni/costanti che li interpretano in una data struttura vanno presentati nello stesso ordine.

Esempio

Se $L = \{P, f, g, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, allora dire che

$$\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 3 \rangle$$

è una L -struttura significa che \mathbb{R} è il dominio della struttura, $<$ è l'interpretazione di P , la somma $+$ è l'interpretazione di f ,

Alcune precisazioni e osservazioni

Per convenzione, se i simboli di un linguaggio L sono elencati in un determinato ordine, allora anche le relazioni/funzioni/costanti che li interpretano in una data struttura vanno presentati nello stesso ordine.

Esempio

Se $L = \{P, f, g, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, allora dire che

$$\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 3 \rangle$$

è una L -struttura significa che \mathbb{R} è il dominio della struttura, $<$ è l'interpretazione di P , la somma $+$ è l'interpretazione di f , il prodotto \cdot è l'interpretazione di g

Alcune precisazioni e osservazioni

Per convenzione, se i simboli di un linguaggio L sono elencati in un determinato ordine, allora anche le relazioni/funzioni/costanti che li interpretano in una data struttura vanno presentati nello stesso ordine.

Esempio

Se $L = \{P, f, g, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, allora dire che

$$\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 3 \rangle$$

è una L -struttura significa che \mathbb{R} è il dominio della struttura, $<$ è l'interpretazione di P , la somma $+$ è l'interpretazione di f , il prodotto \cdot è l'interpretazione di g e 3 è l'interpretazione di c .

A cosa servono le L -strutture?

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario e sia φ l'enunciato $\exists x \forall y P(x, y)$, che asserisce che “esiste un x che è in relazione P con tutti gli y ”. Non ha senso chiedersi se φ sia vero o falso: la risposta infatti dipenderà da

- quali oggetti/elementi decidiamo di considerare
- qual'è la relazione P in questione.

Ad esempio, se decidiamo di considerare i numeri naturali e di identificare P con l'usuale relazione d'ordine \leq su tale insieme, allora φ è vero, perché esiste un elemento, lo 0, che è minore o uguale di tutti i numeri naturali. Tecnicamente, quello che abbiamo fatto è considerare la L -struttura $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ e osservare che φ , interpretato in tale struttura, è vero. Se invece consideriamo le L -strutture $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ oppure $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$, allora φ risulta falso in esse (perché?).

Le L -strutture servono a fornire un “contesto” in cui interpretare le formule del prim'ordine scritte utilizzando il linguaggio L .