

Logica Matematica

4.2 – Semantica della logica proposizionale

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Interpretazioni

Sia L un insieme di lettere proposizionali.

Definizione

Un'interpretazione è una funzione $i: L \rightarrow \{0, 1\}$.

L'idea è che un'interpretazione i assegna valori di verità (0 per falso, 1 per vero) alle lettere proposizionali scelte.

Esempio

Sia $L = \{A, B\}$. Allora l'interpretazione $i: L \rightarrow \{0, 1\}$ definita da

$$i(A) = 0$$

$$i(B) = 1$$

“descrive” la situazione in cui A è falsa e B è vera.

L'interpretazione $i(A) = i(B) = 1$ “descrive” invece la situazione in cui sia A che B sono vere.

Definizione

Una **valutazione** è una funzione $v: \text{Prop}(L) \rightarrow \{0, 1\}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$v((\neg P)) = 1 - v(P)$$

$$v((P \wedge Q)) = \min\{v(P), v(Q)\}$$

$$v((P \vee Q)) = \max\{v(P), v(Q)\}$$

$$v((P \rightarrow Q)) = \max\{1 - v(P), v(Q)\}$$

$$v((P \leftrightarrow Q)) = 1 - |v(P) - v(Q)|.$$

Dunque una valutazione assegna valori di verità a *tutte* le (infinite!) proposizioni che si possono scrivere a partire da L . Le condizioni nella definizione di valutazione sono essenzialmente espressioni analitiche (in termini di funzioni) delle tavole di verità dei connettivi.

Esempio

La condizione

$$v((\neg P)) = 1 - v(P)$$

fa sì che

- se $v(P) = 0$ (ovvero “P è falsa”), allora $v((\neg P)) = 1 - 0 = 1$ (ovvero “ $(\neg P)$ è vera”);
- se $v(P) = 1$ (ovvero “P è vera”), allora $v((\neg P)) = 1 - 1 = 0$ (ovvero “ $(\neg P)$ è falsa”).

Questo descrive esattamente la tavola di verità della negazione:

$\frac{P}{\mathbf{F}}$	$\frac{\neg P}{\mathbf{V}}$	ovvero	$\frac{P}{0}$	$\frac{\neg P}{1}$
$\frac{P}{\mathbf{V}}$	$\frac{\neg P}{\mathbf{F}}$		$\frac{P}{1}$	$\frac{\neg P}{0}$

Esempio $v((P \wedge Q)) = \min\{v(P), v(Q)\}$

- Se $v(P) = v(Q) = 0$ (“P e Q sono false”), allora $v((P \wedge Q)) = \min\{0, 0\} = 0$ (“(P ∧ Q) è falsa”).
- Se $v(P) = 1$ e $v(Q) = 0$ (“P è vera e Q è falsa”), allora $v((P \wedge Q)) = \min\{1, 0\} = 0$ (“(P ∧ Q) è falsa”).
- Se $v(P) = 0$ e $v(Q) = 1$ (“P è falsa e Q è vera”), allora $v((P \wedge Q)) = \min\{0, 1\} = 0$ (“(P ∧ Q) è falsa”).
- Se $v(P) = v(Q) = 1$ (“P e Q sono vere”), allora $v((P \wedge Q)) = \min\{1, 1\} = 1$ (“(P ∧ Q) è vera”).

Questo descrive esattamente la tavola di verità della congiunzione:

P	Q	$P \wedge Q$		P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F		0	0	0
V	F	F	ovvero	1	0	0
F	V	F		0	1	0
V	V	V		1	1	1

Esercizio

Verificare che le rimanenti condizioni nella definizione di valutazione descrivono le tavole di verità dei rispettivi connettivi.

Ogni valutazione $v: \text{Prop}(L) \rightarrow \{0, 1\}$ fornisce, in particolare, una corrispondente interpretazione $i: L \rightarrow \{0, 1\}$ che si ottiene stabilendo che per ogni $A \in L$

$$i(A) \stackrel{\text{def}}{=} v((A)).$$

In altre parole, i è la “restrizione” di v ad L una volta che si identifichi ciascuna lettera proposizionale A con la corrispondente formula atomica (A) : per questa ragione la denoteremo con $v \upharpoonright L$.

Vediamo ora che, viceversa, da un'interpretazione i si può ottenere in maniera canonica una valutazione, che denoteremo con i^* .

Ogni interpretazione i si estende a una valutazione i^* ponendo $i^*((A)) = i(A)$ per ogni $A \in L$, e definendo $i^*(P)$ per le proposizioni P non atomiche così:

$$\begin{aligned}i^*((\neg P)) &= 1 - i^*(P) \\i^*((P \wedge Q)) &= \min\{i^*(P), i^*(Q)\} \\i^*((P \vee Q)) &= \max\{i^*(P), i^*(Q)\} \\i^*((P \rightarrow Q)) &= \max\{1 - i^*(P), i^*(Q)\} \\i^*((P \leftrightarrow Q)) &= 1 - |i^*(P) - i^*(Q)|.\end{aligned}$$

Le condizioni sono le stesse della definizione di valutazione, ovvero “descrivono” la tavola di verità dei connettivi corrispondenti!

Osservazione

L'interpretazione $v \upharpoonright L$ indotta da una valutazione v è tale che $(v \upharpoonright L)^* = v$. Viceversa, per ogni interpretazione i si ha che $i^* \upharpoonright L = i$.

Come si calcola i^* ?

Data un'interpretazione i ed una proposizione non atomica $P \in \text{Prop}(L)$, per calcolare $i^*(P)$ bisognerà prima di tutto aver calcolato il valore di i^* sulle sottoproposizioni principali di P . Ripetendo questo ragionamento anche per le sottoproposizioni (principali) di P , si vede che per calcolare $i^*(P)$ bisognerà prima calcolare i^* su tutte le sue sottoproposizioni, **partendo da quelle atomiche e seguendo poi la struttura dell'albero sintattico.**

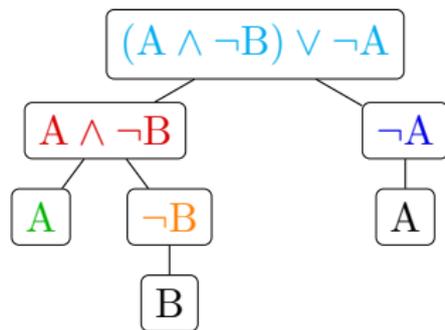
Osservazione

Il valore di $i^*(P)$ dipende *solo dal valore assunto da i sulle lettere proposizionali che occorrono in P .*

Esempio. Sia $L = \{A, B, C, D\}$ e $P \in \text{Prop}(L)$ la proposizione $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg D$. Un'interpretazione $i: L \rightarrow \{0, 1\}$ si ottiene assegnando un valore di verità a *tutte* le lettere proposizionali di L . Tuttavia, solo i valori $i(A)$, $i(B)$ e $i(D)$ sono rilevanti per il calcolo di $i^*(P)$, mentre il valore $i(C)$ è del tutto irrilevante per questo scopo.

Un esempio

Sia $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$. Calcoliamo $i^*(P)$ dove P è $(A \wedge \neg B) \vee \neg A$.
L'albero sintattico di P è

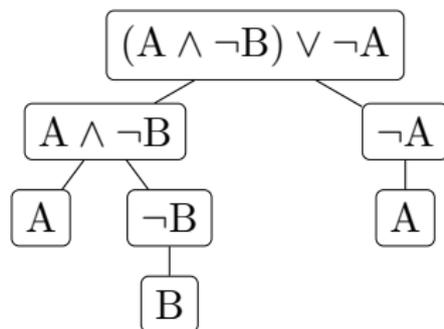


Poiché P è della forma $R \vee S$, dovremo innanzitutto calcolare $i^*(R)$ e $i^*(S)$ per poter poi calcolare $i^*(P) = \max\{i^*(R), i^*(S)\}$.

A sua volta, poichè R è della forma $W \wedge T$, dovremo prima calcolare $i^*(W)$ e $i^*(T)$ per poter poi calcolare $i^*(R) = \min\{i^*(W), i^*(T)\}$. E così via fino alle foglie, in cui il valore di i^* è dato esplicitamente da i .

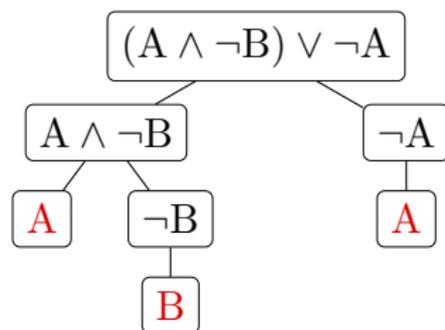
Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue



Un esempio (continua)

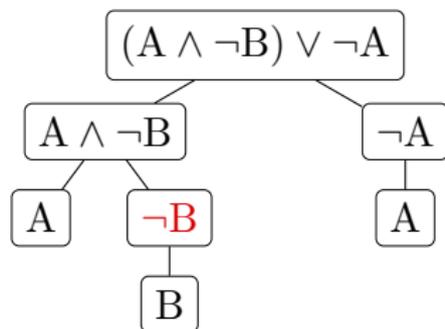
Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue



Si ricordi che per definizione $i^*(A) = i(A) = 1$ e $i^*(B) = i(B) = 0$.

Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue

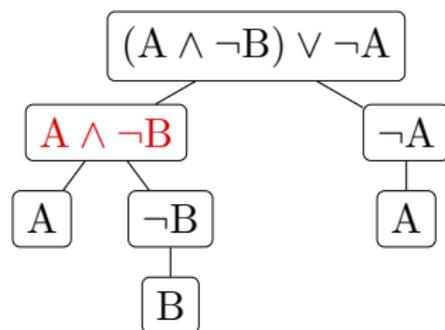


Si ricordi che per definizione $i^*(A) = i(A) = 1$ e $i^*(B) = i(B) = 0$.

$$i^*(\neg B) = 1 - i^*(B) = 1 - 0 = 1$$

Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue



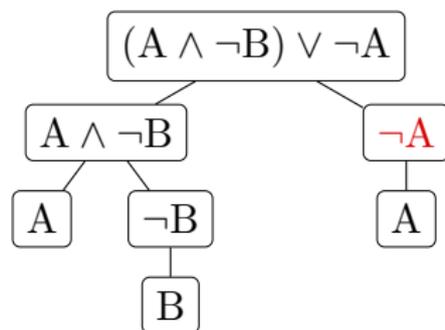
Si ricordi che per definizione $i^*(A) = i(A) = 1$ e $i^*(B) = i(B) = 0$.

$$i^*(\neg B) = 1 - i^*(B) = 1 - 0 = 1$$

$$i^*(A \wedge \neg B) = \min\{i^*(A), i^*(\neg B)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue



Si ricordi che per definizione $i^*(A) = i(A) = 1$ e $i^*(B) = i(B) = 0$.

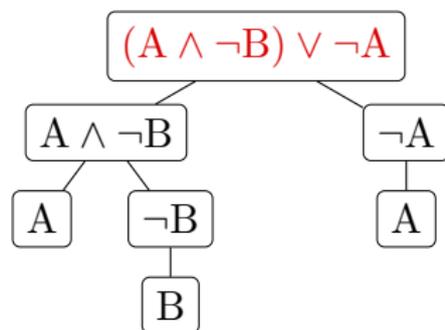
$$i^*(\neg B) = 1 - i^*(B) = 1 - 0 = 1$$

$$i^*(A \wedge \neg B) = \min\{i^*(A), i^*(\neg B)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

$$i^*(\neg A) = 1 - i^*(A) = 1 - 1 = 0$$

Un esempio (continua)

Dunque per calcolare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ procederemo come segue



Si ricordi che per definizione $i^*(A) = i(A) = 1$ e $i^*(B) = i(B) = 0$.

$$i^*(\neg B) = 1 - i^*(B) = 1 - 0 = 1$$

$$i^*(A \wedge \neg B) = \min\{i^*(A), i^*(\neg B)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

$$i^*(\neg A) = 1 - i^*(A) = 1 - 1 = 0$$

$$i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A) = \max\{i^*(A \wedge \neg B), i^*(\neg A)\} = \max\{1, 0\} = 1$$

Un esempio (continua)

Dunque per determinare $i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A)$ a partire da $i(A) = 1$ e $i(B) = 0$ abbiamo calcolato in successione i valori seguenti:

$$i^*(\neg B) = 1 - i^*(B) = 1 - 0 = 1$$

$$i^*(A \wedge \neg B) = \min\{i^*(A), i^*(\neg B)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

$$i^*(\neg A) = 1 - i^*(A) = 1 - 1 = 0$$

$$i^*((A \wedge \neg B) \vee \neg A) = \max\{i^*(A \wedge \neg B), i^*(\neg A)\} = \max\{1, 0\} = 1$$

Graficamente possiamo rappresentare questi conti ponendo i valori così ottenuti sotto la proposizione corrispondente:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A$	$(A \wedge \neg B) \vee \neg A$
1	0	1	1	0	1

Dunque calcolare $i^*(P)$ corrisponde a calcolare una riga della tavola di verità di P — la riga determinata dall'interpretazione i .

Tavole di verità

Per calcolare una tavola di verità di una proposizione P bisogna quindi:

- 1 costruire l'albero sintattico di P , che ci permetterà di
 - ▶ verificare che P è una proposizione ben formata;
 - ▶ determinare le sottoproposizioni di P e l'ordine con cui andranno considerate;
 - ▶ individuare un linguaggio L "minimale" tale che $P \in \text{Prop}(L)$: infatti L è costituito da tutte le (lettere proposizionali che formano le) sottoproposizioni atomiche di P , che a loro volta corrispondono alle foglie dell'albero;
- 2 considerare tutte le possibili interpretazioni $i: L \rightarrow \{0, 1\}$, ovvero tutte le possibili combinazioni di assegnazioni di valori di verità alle lettere proposizionali in L (ciascuna interpretazione i sarà una diversa riga nella tavola di verità);
- 3 estendere ciascuna di tali interpretazioni i alla corrispondente valutazione i^* fino a calcolare $i^*(P)$.

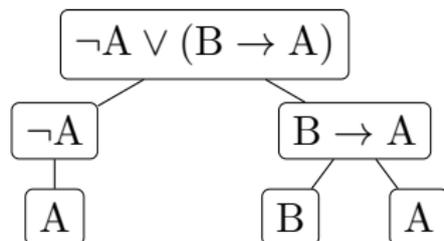
Un esempio

Sia P la proposizione $\neg A \vee (B \rightarrow A)$.

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg A \vee (B \rightarrow A)$.

Step 1. Costruire l'albero sintattico di $\neg A \vee (B \rightarrow A)$, che ci permetterà di determinare le sue sottoproposizioni e l'ordine con cui andranno considerate, ed un opportuno linguaggio L .

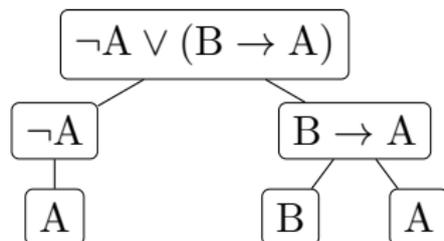


A	B	$\neg A$	$B \rightarrow A$	$\neg A \vee (B \rightarrow A)$

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg A \vee (B \rightarrow A)$.

Step 2. Considerare tutte le possibili interpretazioni $i: L \rightarrow \{0, 1\}$.

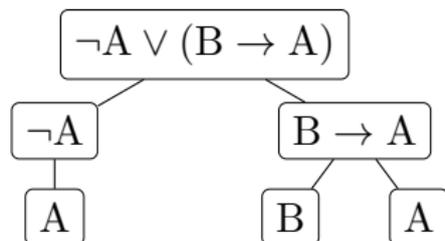


A	B	$\neg A$	$B \rightarrow A$	$\neg A \vee (B \rightarrow A)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Un esempio

Sia P la proposizione $\neg A \vee (B \rightarrow A)$.

Step 3. Estendere ciascuna di tali interpretazioni i alla corrispondente valutazione i^* fino a calcolare $i^*(P)$.



A	B	$\neg A$	$B \rightarrow A$	$\neg A \vee (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Alcune nozioni logiche

- Se $i^*(P) = 1$, si dice che P è **vera** nell'interpretazione i , o che i *soddisfa* P , o che i è un **modello** di P , e si scrive anche

$$i \models P.$$

- Se esiste almeno un'interpretazione i tale che $i \models P$, si dice che P è **soddisfacibile**, o **coerente**.
- Se non esiste alcun modello di P , si dice che P è **insoddisfacibile**, o **incoerente**, o **contraddittoria**, o una **contraddizione**.
- Se per ogni interpretazione i si ha $i \models P$, si dice che P è **(logicamente) valida**, o **logicamente vera**, o una **tautologia**, e si scrive

$$\models P.$$

Le nozioni appena viste si possono anche estendere ad insiemi di proposizioni.

Sia $\Gamma \subseteq \text{Prop}(L)$ un insieme (finito o infinito) di proposizioni costruite a partire dallo stesso insieme di lettere proposizionali L .

- Un'interpretazione $i: L \rightarrow \{0, 1\}$ è un **modello** di Γ , in simboli

$$i \models \Gamma,$$

se $i \models P$ per ogni $P \in \Gamma$. In questo caso diciamo anche che Γ è **soddisfatto** da i , o che i **soddisfa** Γ .

- Γ si dice **soddisfacibile** (o **coerente**) se *esiste* un'interpretazione i tale che $i \models \Gamma$; in caso contrario, ovvero se $i \not\models \Gamma$ per ogni interpretazione i , si dice che Γ è **insoddisfacibile** (o **incoerente**).
- L'insieme di proposizioni Γ è **valido** se $i \models \Gamma$ per ogni interpretazione i . In questo caso scriviamo $\models \Gamma$.

Osservazioni

Sia $\Gamma \subseteq \text{Prop}(L)$.

- Γ è valido se e solo se ogni $P \in \Gamma$ è una tautologia.
- È invece possibile che tutte le proposizioni $P \in \Gamma$ siano soddisfacibili, ma che Γ non sia soddisfacibile come insieme di proposizioni (si consideri ad esempio $\Gamma = \{A, \neg A\}$).
- Se $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ è un insieme **finito**, allora per ogni interpretazione i

$$i \models \Gamma \quad \text{se e solo se} \quad i \models P_1 \wedge \dots \wedge P_n.$$

Di conseguenza, Γ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valido se e solo se la proposizione $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ è soddisfacibile/insoddisfacibile/valida.