

# Esercizi vari di Logica Matematica

(tratti da esami degli anni precedenti)

Anno accademico 2019-20

## 1 Insiemi, relazioni, funzioni e cardinalità

### Esercizio 1

Disegnare il diagramma di Hasse dei seguenti reticoli (dove l'ordine è dato dalla relazione di divisibilità):

- reticolo dei divisori di 20;
- reticolo dei divisori di 105.

**Soluzione:**

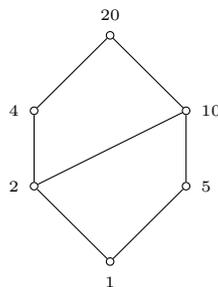


Figura 1: Reticolo dei divisori di 20.

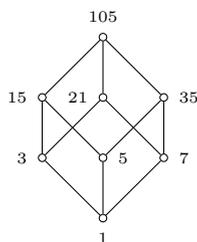


Figura 2: Reticolo dei divisori di 105.

### Esercizio 2

Giustificando la propria risposta, dire per ciascuna delle seguenti funzioni se è iniettiva, suriettiva, biiettiva o nessuna delle tre.

## Esercizi vari di Logica Matematica

---

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x + 4.$
- $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x + 4.$
- $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 \cdot |x|$
- $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad x \mapsto -2 \cdot |x|$

dove  $|x|$  indica il valore assoluto di  $x$  e  $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$ .

### Soluzione:

- $f$  è *iniettiva*: se  $x, y \in \mathbb{R}$  sono tali che  $f(x) = f(y)$ , allora  $3x + 4 = 3y + 4$  da cui sottraendo 4 e dividendo poi per 3 si ottiene  $x = y$ .

$f$  è *suriettiva*: dato qualunque  $y \in \mathbb{R}$ , ponendo  $x = \frac{y-4}{3}$  si ha

$$f(x) = f\left(\frac{y-4}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{y-4}{3}\right) + 4 = (y-4) + 4 = y.$$

Quindi  $f$  è una funzione *biettiva*.

- $g$  è *iniettiva*: come nel caso di  $f$ , da  $g(x) = g(y)$  segue che  $x = y$  (infatti,  $g$  è la restrizione di  $f$  a  $\mathbb{Q}$ ).

$g$  *NON* è *suriettiva*: infatti se  $x \in \mathbb{Q}$  allora anche  $g(x) = 3x + 4 \in \mathbb{Q}$ . Quindi dato  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non esiste alcun  $x \in \mathbb{Q}$  tale che  $g(x) = y$ .

Quindi  $g$  non è nemmeno *biettiva*.

- $h$  *NON* è *iniettiva*: ad esempio, si ha che  $1 \neq -1$  ma  $h(1) = 2 \cdot |1| = 2 \cdot 1 = 2$  e  $h(-1) = 2 \cdot |-1| = 2 \cdot 1 = 2$ , ovvero  $h(1) = h(-1)$ .

$h$  *NON* è *suriettiva*: dato qualunque  $x \in \mathbb{R}$ , si ha che  $h(x) = 2 \cdot |x| \geq 0$ . Quindi dato  $y \in \mathbb{R}$  tale che  $y < 0$ , non esiste nessun  $x \in \mathbb{R}$  per cui valga  $h(x) = y$ .

In particolare,  $h$  non è nemmeno una funzione *biettiva*.

- $k$  *NON* è *iniettiva*: ad esempio, si ha che  $1 \neq -1$  ma  $k(1) = -2 \cdot |1| = -2 \cdot 1 = -2$  e  $k(-1) = -2 \cdot |-1| = -2 \cdot 1 = -2$ , ovvero  $k(1) = k(-1)$ .

$k$  è *suriettiva*: dato qualunque  $y \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ , basta porre  $x = \frac{y}{2}$  per avere che

$$k(x) = k\left(\frac{y}{2}\right) = -2 \cdot \left|\frac{y}{2}\right| = -2 \cdot -\left(\frac{y}{2}\right) = y,$$

dove la penultima uguaglianza vale poiché  $y \leq 0$ , da cui anche  $\frac{y}{2} \leq 0$ .

Poiché non è *iniettiva*,  $h$  non è nemmeno una funzione *biettiva*.

### Esercizio 3

Sia

$$\text{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ è finito}\}$$

e si ricordi che  $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$  è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali. Dimostrare che

$$|\text{Fin}| = |\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}|.$$

**Soluzione:** Si ha  $\mathbb{N} \preceq \text{Fin}$  via la mappa  $n \mapsto \{n\}$ ,  $\text{Fin} \preceq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$  via la mappa che associa ad  $A \in \text{Fin}$  la sequenza che enumera  $A$  in ordine crescente, e  $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$  per quanto visto a lezione. Quindi

$$\text{Fin} \approx \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}$$

per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.

**Esercizio 4**

Si consideri l'insieme

$$D = \{w \in \{a, b\}^{<\mathbb{N}} \mid a \text{ e } b \text{ compaiono in } w \text{ lo stesso numero di volte}\}.$$

Dimostrare che  $D$  è numerabile.

**Soluzione:**

**Esercizio 5**

Dimostrare che l'insieme

$$D = \{s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} (s(2k) = s(2k + 1))\}$$

è in biezione con  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . È vero che  $D$  è numerabile?

**Soluzione:** La funzione  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow D$ ,  $s \mapsto s'$  è una biezione, dove  $s'(2n) = s'(2n + 1) = s(n)$ .

**Esercizio 6**

Dimostrare  $D = \{\frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  è in biezione con  $\mathbb{N}$ .

**Soluzione:**  $\mathbb{N} \subseteq D$  e  $D \subseteq \mathbb{Q}$  quindi per il Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein  $D$  è numerabile.

**Esercizio 7**

Sia  $L = \{f, a\}$  un linguaggio del prim'ordine costituito dal simbolo di funzione unario  $f$  e dal simbolo di costante  $a$ . Sia  $\text{Term}$  l'insieme di tutti i termini nel linguaggio  $L$ . Dimostrare che l'insieme

$$A = \{t \in \text{Term} \mid t \text{ non contiene variabili}\}$$

è un insieme numerabile, ovvero  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

*Suggerimento:* Osservare che  $a \in A$  e che se  $t \in A$  allora  $f(t) \in A$ .

**Soluzione:** Gli elementi di  $A$  sono

$$a \quad f(a) \quad f(f(a)) \quad f(f(f(a))) \quad \dots \quad f(\dots f(a)\dots) \quad \dots$$

Poiché  $A \subseteq \{f, a, (, )\}^{<\mathbb{N}}$  si ha che  $|A| \leq |\mathbb{N}|$ . Viceversa, possiamo definire per ricorsione la successione di termini  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ponendo

$$\begin{aligned}t_0 &= a \\ t_{n+1} &= f(t_n).\end{aligned}$$

La funzione  $n \mapsto t_n$  è chiaramente iniettiva poiché  $t_n$  contiene  $n$  occorrenze del simbolo  $f$ , e testimonia quindi che  $|\mathbb{N}| \leq |A|$ . Per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, possiamo concludere che  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

*Osservazione:* Si può anche notare direttamente che la funzione  $n \mapsto t_n$  è una biezione tra  $\mathbb{N}$  e  $A$ .

### Esercizio 8

Dimostrare che

$$|A| = |B|$$

dove

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un quadrato perfetto}\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{1}{p+1} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Soluzione:** Osserviamo che  $A = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ . La funzione

$$f: A \rightarrow B, \quad m^2 \mapsto \frac{1}{m+1}$$

è allora una biezione che testimonia  $A \approx B$ .

## 2 Principio di induzione

### Esercizio 1

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale la relazione

$$\sum_{i=0}^n (2i + 3) = n^2 + 4n + 3.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Passo base** ( $n = 0$ )

$$\sum_{i=0}^0 (2i + 3) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3.$$

**Passo induttivo**

*Ipotesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^n (2i + 3) = n^2 + 4n + 3$ .

*Tesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 3) = (n + 1)^2 + 4(n + 1) + 3$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} (2i + 3) &= \sum_{i=0}^n (2i + 3) + 2(n + 1) + 3 \\ &= n^2 + 4n + 3 + 2(n + 1) + 3 && \text{per ipotesi induttiva} \\ &= n^2 + 6n + 8 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 4n + 7 \\ &= (n + 1)^2 + 4n + 7 \\ &= (n + 1)^2 + 4n + 4 + 3 \\ &= (n + 1)^2 + 4(n + 1) + 3. \end{aligned}$$

### Esercizio 2

Definiamo la successione dei  $c_n$  per ricorsione su  $n \in \mathbb{N}$  come segue:

$$\begin{aligned} c_0 &= 2 \\ c_{n+1} &= \frac{1}{c_n}. \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni  $n \geq 0$

$$1/2 \leq c_n \leq 2.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \in \mathbb{N}$ .

**Passo base** ( $n = 0$ )

Per definizione, si ha che

$$c_0 = 2$$

è un numero compreso nei valori richiesti, ossia

$$1/2 \leq c_0 \leq 2.$$

**Passo induttivo**

*Ipotesi induttiva:*

$$1/2 \leq c_n \leq 2.$$

*Tesi induttiva:*

$$1/2 \leq c_{n+1} \leq 2.$$

Verifichiamo dunque la tesi induttiva, sfruttando la definizione di  $c_{n+1}$  e l'ipotesi induttiva. Osserviamo che se  $0 < c_n \leq 2$  allora

$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n} \geq \frac{1}{2}.$$

Similmente se  $c_n \geq \frac{1}{2}$ , allora  $c_n > 0$  e quindi si ha che

$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n} \leq 2.$$

Quindi se vale  $\frac{1}{2} \leq c_n \leq 2$ , vale anche  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{c_n} = c_{n+1} \leq 2$

La tesi induttiva è dunque verificata come richiesto.

**Esercizio 3**

Sia  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la successione definita per ricorsione da

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot a_n \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni  $n > 0$

$$0 < a_n < 1.$$

*Suggerimento:* Per il passo induttivo, osservare innanzitutto che se  $0 < r < 1$  allora anche  $0 < \frac{1}{2} \cdot r < 1$  e  $0 < 1 - r < 1$ .

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 1$ .

**Passo base** ( $n = 1$ ). Si ha  $a_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ , per cui  $0 < a_1 < 1$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $0 < a_n < 1$

*Tesi induttiva:*  $0 < a_{n+1} < 1$

Osserviamo che poiché  $0 < a_n < 1$  per ipotesi induttiva, allora vale anche  $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n < 1$ . Poiché  $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot a_n$ , da  $0 < \frac{1}{2} \cdot a_n$  segue che  $a_{n+1} < 1$ , mentre da  $\frac{1}{2} \cdot a_n < 1$  segue che  $a_{n+1} > 0$ . Quindi  $0 < a_{n+1} < 1$ , come desiderato.

**Esercizio 4**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n (3k + 1) = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}.$$

**Soluzione:** Per induzione:

**CASO BASE,  $n = 0$ :**

$$\sum_{k=0}^n 3k + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1 = \frac{3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 2}{2}.$$

La tesi è verificata.

**PASSO INDUTTIVO,  $n = m + 1$ :** Da un alto ho che:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 3k + 1 &= \left( \sum_{k=0}^m 3k + 1 \right) + 3(m + 1) + 1 \stackrel{Hp.Ind.}{=} \\ &= \frac{3m^2 + 5m + 2}{2} + 3m + 4 = \\ &= \frac{3m^2 + 5m + 2 + 6m + 8}{2} = \\ &= \frac{3m^2 + 11m + 10}{2}. \end{aligned}$$

D'altra parte osserviamo anche che:

$$\frac{3(m + 1)^2 + 5(m + 1) + 2}{2} = \frac{3m^2 + 6m + 3 + 5m + 5 + 2}{2} = \frac{3m^2 + 11m + 10}{2}.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^n 3k + 1 = \frac{3m^2 + 11m + 10}{2} = \frac{3(m + 1)^2 + 5(m + 1) + 2}{2}.$$

La tesi è verificata anche per il passo induttivo.

**Esercizio 5**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Base ( $n = 0$ )**

$$\sum_{i=0}^0 3^i = 3^0 = 1 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{3^{0+1} - 1}{2}.$$

**Passo induttivo**

*Ipotesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ .

*Tesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{3^{(n+1)+1}-1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 3^i &= \sum_{i=0}^n 3^i + 3^{n+1} \\ &= \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} && \text{per ip.ind.} \\ &= \frac{3^{n+1}-1 + 2 \cdot 3^{n+1}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 1}{2} \\ &= \frac{3^{(n+1)+1} - 1}{2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 6**

Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

**Soluzione:** Base ( $n = 1$ ):

$$\sum_{i=1}^1 i(i+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \left( \sum_{i=1}^n i(i+1) \right) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3} \end{aligned}$$

**Esercizio 7**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

**Soluzione:** Base ( $n = 0$ ):

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$$

Passi induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2^i &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1\end{aligned}$$

### Esercizio 8

Dimostrare che per ogni  $m \in \mathbb{N}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n m = m \cdot n$$

ricordando che per convenzione  $\sum_{i=1}^0 m = 0$ .

**Soluzione:** Sia  $m \in \mathbb{N}$  un generico numero naturale, procediamo per induzione su  $n$ .

Base ( $n = 0$ ):

$$\sum_{i=1}^0 m = 0 = m \cdot 0$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} m &= \left( \sum_{i=1}^n m \right) + m \\ &= (m \cdot n) + m \quad \text{per ipotesi induttiva} \\ &= m \cdot (n + 1)\end{aligned}$$

### Esercizio 9

Dato un linguaggio del prim'ordine  $L$  con un simbolo funzionale binario  $f$  ed un simbolo di costante  $a$ , dimostrare per induzione che per ogni  $n > 0$  esiste un  $L$ -termine che contiene  $2n$  occorrenze del simbolo  $a$ .

**Soluzione:** Se  $n = 1$  allora si prende  $f(a, a)$ . Se la proposizione è vera per un generico  $k$ , allora sia  $t$  un termine con  $2k$  occorrenze di  $a$ : la proposizione resta vera al passo induttivo prendendo per esempio  $f(t, f(a, a))$  che contiene appunto  $2k + 2 = 2(k + 1)$  occorrenze di  $a$ .

### Esercizio 10

Dimostrare per induzione che per ogni  $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n (2i)^3 = 2n^2(n + 1)^2.$$

**Soluzione:**

**Esercizio 11**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono esattamente  $2^n$  stringhe di lunghezza  $n$  sull'alfabeto  $A = \{0, 1\}$ .

**Soluzione:**

**Esercizio 12**

Dimostrare per induzione che se  $n$  è dispari e  $a_1, \dots, a_n$  sono dispari, allora  $\sum_{i=1}^n a_i$  è dispari.

**Soluzione:** Sia  $P(n)$  l'affermazione: se  $a_1, \dots, a_{2n+1}$  sono dispari, allora  $\sum_{i=1}^{2n+1} a_i$  è dispari.

Caso base.  $P(0)$  dice che se  $a_1$  è dispari, allora  $a_1$  è dispari; quindi  $P(0)$  vale.

Passo induttivo:  $\sum_{i=1}^{2(k+1)+1} a_i = (\sum_{i=1}^{2k+1} a_i) + a_{2k+2} + a_{2k+3}$ , per ipotesi induttiva  $\sum_{i=1}^{2k+1} a_i$  è dispari e  $a_{2k+2} + a_{2k+3}$  è pari, in quanto somma di 2 dispari, quindi  $\sum_{i=1}^{2(k+1)+1} a_i$  è la somma di un pari e di un dispari, che è dispari.

**Esercizio 13**

Dimostrare per induzione che  $\sum_{k=1}^n (4k + 1) = n(2n + 3)$ .

**Soluzione:** Sia  $P(n)$  l'affermazione:  $\sum_{k=1}^n (4k + 1) = n(2n + 3)$ .

Caso base.  $P(1)$  dice che se  $4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3)$ ; quindi  $P(1)$  vale.

Passo induttivo:  $\sum_{k=1}^m (4k + 1) = m(2m + 3)$ , per ipotesi induttiva  $\sum_{k=1}^{m+1} (4k + 1) = (\sum_{k=1}^m (4k + 1)) + 4(m + 1) + 1 = m(2m + 3) + 4(m + 1) + 1 = 2m^2 + 7m + 5 = (m + 1)(2(m + 1) + 3)$ .

**Esercizio 14**

Dimostrare per induzione che se  $n \geq 1$  allora

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$$

**Soluzione:** Sia  $P(n)$  l'affermazione  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1$ .

Caso base. Se  $n = 1$  allora  $\sum_{k=1}^1 k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$  e  $(n - 1) \cdot 2^n + 1 = 0 \cdot 2^1 + 1$ , quindi  $P(1)$  è verificata.

Passo induttivo: supponiamo che la formula valga per un certo  $m \geq 1$  e dimostriamola per  $m + 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k \cdot 2^{k-1} &= \left[ \sum_{k=1}^m k \cdot 2^{k-1} \right] + (m + 1)2^m \\ &= [(m - 1) \cdot 2^m + 1] + (m + 1)2^m && \text{ipotesi induttiva} \\ &= (m - 1 + m + 1) \cdot 2^m + 1 \\ &= m \cdot 2^{m+1} + 1, \end{aligned}$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

**Esercizio 15**

Dimostrare per induzione che se  $n \geq 1$  allora

$$\prod_{i=1}^n (4i - 2) = \frac{(2n)!}{n!},$$

dove  $\prod_{i=1}^n (4i - 2) = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n - 2)$ .

**Soluzione:** Caso base:  $n = 1$ . Allora  $2 = \frac{2!}{1!}$ .

Passo induttivo:  $2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n - 2) \cdot (4(n + 1) - 2) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (4n + 2) = \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$

**Esercizio 16**

Data la definizione ricorsiva

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n + 1) &= 1 - f(n) \end{aligned}$$

dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \in \{0, 1\}.$$

**Soluzione:**

**Esercizio 17**

Dato un alfabeto  $A$ , dimostrare per induzione che per ogni coppia di stringhe  $s, t \in A^*$ , la lunghezza della concatenazione di  $s$  con  $t$  è la somma delle lunghezze di  $s$  e di  $t$ , in simboli:

$$\text{lh}(st) = \text{lh}(s) + \text{lh}(t)$$

**Soluzione:** Induzione sulla lunghezza di  $s$ .

Caso base:  $s = \langle \rangle$ . Allora

$$\begin{aligned} \text{lh}(st) &= \text{lh}(\langle \rangle t) \\ &= \text{lh}(t) \\ &= 0 + \text{lh}(t) \\ &= \text{lh}(\langle \rangle) + \text{lh}(t) \end{aligned}$$

Passo induttivo:

$$\begin{aligned} \text{lh}((as)t) &= \text{lh}(a(st)) \\ &= 1 + \text{lh}(st) \\ &= 1 + \text{lh}(s) + \text{lh}(t) \\ &= \text{lh}(as) + \text{lh}(t) \end{aligned}$$

**Esercizio 18**

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

**Soluzione:** Caso Base:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{0(0+1)}{2} \\ &= \frac{1}{6}0(0+1)(0+2) \end{aligned}$$

Passo induttivo: supponiamo che  $\sum_{k=0}^m \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$  valga per un qualche  $m$  fissato.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{k(k+1)}{2} &= \left( \sum_{k=0}^m \frac{k(k+1)}{2} \right) + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(m+2) + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \text{per ipotesi induttiva} \\ &= (m+1)(m+2) \left( \frac{1}{6}m + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3) \end{aligned}$$

**Esercizio 19**

Dimostrare per induzione che esistono  $n!$  permutazioni di un insieme con  $n$  elementi, dove  $n! = \prod_{i=1}^n i$ .

*Suggerimento.* Si osservi che una permutazione di un insieme di  $n+1$  elementi è determinata dalla scelta di un elemento dell'insieme con una permutazione dei restanti  $n$  elementi.

**Soluzione:** Caso Base: Se l'insieme è vuoto, allora chiaramente la funzione vuota è l'unica permutazione.

Passo induttivo: Assumiamo che ogni insieme di  $n$  elementi ammetta  $n!$  permutazioni. Sia  $X$  un insieme di  $n+1$  elementi: allora  $X \setminus \{x\}$  ammette  $n!$  permutazioni, per ipotesi induttiva, per ciascuna delle  $n+1$  scelte possibili di  $x \in X$ , che dà un totale di  $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$  permutazioni.

**Esercizio 20**

Si dimostri per induzione strutturale che il numero di parentesi in una formula è sempre pari.

**Soluzione:** La base è ovvia: la formula è  $(A)$  per una lettera proposizionale  $A$ . Per il passo induttivo, assumiamo che le formule  $\varphi, \psi$  contengano un numero pari di parentesi: si esaminano tutti i casi possibili ed in ciascuno si osserva che le parentesi sono in numero pari. Per esempio, se le parentesi di  $\varphi$  sono  $2n$ , le parentesi di  $\psi$  sono  $2m$ , allora le parentesi della formula  $(\varphi \wedge \psi)$  sono  $2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$ , che è un numero pari.

### Esercizio 21

Dimostrare per induzione su  $n$  che la funzione  $f$  definita ricorsivamente dalle clausole

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f(n+1) &= 1 - f(n)\end{aligned}$$

soddisfa le condizioni seguenti, per ogni numero naturale  $n$ :

$$\begin{array}{ll}f(n) = 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\f(n) = 1 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{array}$$

**Soluzione:** Sia  $P(n)$  la proposizione:

$$\begin{array}{ll}f(n) = 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\f(n) = 1 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{array}$$

Base:  $P(0)$  è vera perché 0 è pari e  $f(0) = 0$ .

Passo induttivo: l'ipotesi induttiva è  $P(n)$ , bisogna dimostrare  $P(n+1)$ , cioè che

$$\begin{array}{ll}f(n) = 0 & \text{se } n+1 \text{ è pari} \\f(n+1) = 1 & \text{se } n+1 \text{ è dispari}\end{array}$$

Procediamo per casi:

Se  $n+1$  è pari, allora  $n$  è dispari, e applicando l'ipotesi induttiva abbiamo  $f(n) = 1$ , perciò

$$\begin{aligned}f(n+1) &= 1 - f(n) \\&= 1 - 1 \\&= 0\end{aligned}$$

Se  $n+1$  è dispari, allora  $n$  è pari, e applicando l'ipotesi induttiva abbiamo  $f(n) = 0$ , perciò

$$\begin{aligned}f(n+1) &= 1 - f(n) \\&= 1 - 0 \\&= 1\end{aligned}$$

Allora  $P(n+1)$  è vera, che conclude la dimostrazione per induzione.

**Esercizio 22**

Sia  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita per ricorsione dalle clausole

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n+1) &= f(n) + 2n - 1. \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$f(n) = n^2 - 2n.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Passo base** ( $n = 0$ ). Si ha che  $f(0) = 0 = 0^2 - 2 \cdot 0$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $f(n) = n^2 - 2n$

*Tesi induttiva:*  $f(n+1) = (n+1)^2 - 2(n+1)$ .

Usando la definizione di  $f$  si ha che

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 2n - 1 && \text{(per definizione di } f) \\ &= n^2 - 2n + 2n - 1 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 \\ &= (n+1)^2 - 2n - 2 \\ &= (n+1)^2 - 2(n+1). \end{aligned}$$

**Esercizio 23**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{i=0}^n (2i - 3) = n^2 - 2n - 3.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Passo base** ( $n = 0$ ). Si ha che  $\sum_{i=0}^0 (2i - 3) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^n (2i - 3) = n^2 - 2n - 3$

*Tesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^{n+1} (2i - 3) = (n+1)^2 - 2(n+1) - 3$ .

Si ha che

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} (2i - 3) &= \sum_{i=0}^n (2i - 3) + 2(n + 1) - 3 \\
 &= n^2 - 2n - 3 + 2(n + 1) - 3 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
 &= n^2 - 2n - 3 + 2n + 2 - 3 \\
 &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 3 + 1 - 3 \\
 &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 3 \\
 &= (n + 1)^2 - 2(n + 1) - 3.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 24**

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{i=0}^n (4i + 4) = (n + 1)(2n + 4).$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Passo base** ( $n = 0$ ). Si ha che  $\sum_{i=0}^0 (4i + 4) = 4 = (0 + 1)(2 \cdot 0 + 4)$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^n (4i + 4) = (n + 1)(2n + 4)$ .

*Tesi induttiva:*  $\sum_{i=0}^{n+1} (4i + 4) = ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 4)$ .

Sviluppando il primo termine dell'uguaglianza si ha che

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} (4i + 4) &= \sum_{i=0}^n (4i + 4) + (4(n + 1) + 4) \\
 &= (n + 1)(2n + 4) + (4(n + 1) + 4) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
 &= 2n^2 + 4n + 2n + 4 + 4n + 4 + 4 \\
 &= 2n^2 + 10n + 12.
 \end{aligned}$$

D'altra parte, sviluppando il secondo termine dell'uguaglianza si ha che

$$\begin{aligned}
 ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 4) &= (n + 2)(2n + 6) \\
 &= 2n^2 + 6n + 4n + 12 \\
 &= 2n^2 + 10n + 12.
 \end{aligned}$$

Dunque anche la tesi induttiva è verificata e la dimostrazione per induzione è completa.

**Esercizio 25**

Sia  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 8. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$a_n = (n + 1)(2n + 4).$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 0$ .

**Passo base** ( $n = 0$ ). Si ha che  $a_0 = 4 = (0 + 1)(2 \cdot 0 + 4)$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $a_n = (n + 1)(2n + 4)$ .

*Tesi induttiva:*  $a_{n+1} = ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 4)$ .

Per definizione di  $a_{n+1}$  si ha che

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 4n + 8 \\ &= (n + 1)(2n + 4) + 4n + 8 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= 2n^2 + 4n + 2n + 4 + 4n + 8 \\ &= 2n^2 + 10n + 12. \end{aligned}$$

D'altra parte, sviluppando il secondo termine dell'uguaglianza della tesi induttiva si ha che

$$\begin{aligned} ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 4) &= (n + 2)(2n + 6) \\ &= 2n^2 + 6n + 4n + 12 \\ &= 2n^2 + 10n + 12. \end{aligned}$$

Dunque anche la tesi induttiva è verificata e la dimostrazione per induzione è completa.

### **Esercizio 26**

Siano  $a$  e  $b$  due numeri naturali. Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$  vale la disuguaglianza

$$(a + b)^n \geq a^n + b^n.$$

**Soluzione:** Per induzione su  $n \geq 1$ .

**Passo base** ( $n = 1$ ). Si ha che  $(a + b)^1 = a + b = a^1 + b^1$ , dunque in particolare  $(a + b)^1 \geq a^1 + b^1$ .

**Passo induttivo.**

*Ipotesi induttiva:*  $(a + b)^n \geq a^n + b^n$ .

*Tesi induttiva:*  $(a + b)^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$ .

Utilizzando la definizione di esponenziale e il fatto che  $a + b$ ,  $ba^n$  e  $ab^n$  sono tutti numeri maggiori o uguali a 0, si ottiene che

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n \cdot (a + b) \\ &\geq (a^n + b^n) \cdot (a + b) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= a^{n+1} + ba^n + ab^n + b^{n+1} \\ &\geq a^{n+1} + b^{n+1}, \end{aligned}$$

come desiderato.

### 3 Logica proposizionale

#### Esercizio 1

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$P : \quad \neg A \rightarrow \neg B$$

$$Q : \quad \neg B \rightarrow \neg A$$

$$R : \quad \neg A \wedge \neg B$$

Determinare se:

1.  $P, Q \models R$ ;
2.  $Q, R \models P$ ;
3.  $P \wedge R \equiv Q$ .

**Soluzione:** Si ha che:

- $P_1, \dots, P_n \models Q$  se e solo se la formula  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  è una tautologia.
- $S \equiv T$  se e solo se la formula  $S \leftrightarrow T$  è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di  $P$ ,  $Q$  e  $R$  si verifica che:

1.  $P, Q \not\models R$  poichè la formula  $P \wedge Q \rightarrow R$  non è una tautologia (è falsa se  $A$  e  $B$  sono entrambe vere);
2.  $Q, R \models P$  poichè la formula  $Q \wedge R \rightarrow P$  è una tautologia;
3.  $P \wedge R \not\models Q$  poichè la formula  $(P \wedge R) \leftrightarrow Q$  non è una tautologia (è falsa se  $A$  è falsa e  $B$  è vera);

#### Esercizio 2

Sia  $P$  la proposizione

$$A \wedge (B \rightarrow A).$$

Giustificando le proprie risposte, dire quale delle seguenti proposizioni sono conseguenza logica di  $P$ :

1.  $A \leftrightarrow \neg A$
2.  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3.  $\neg B \rightarrow A$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità, si vede che la seconda e la terza proposizione sono conseguenza logica di  $P$ , la prima no.

### Esercizio 3

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$P_0 : A \wedge \neg B$$

$$P_1 : B \vee \neg C$$

$$P_2 : A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$$

Determinare se:

1.  $P_0, P_1 \models P_2$ ;

2.  $P_2, P_1 \models P_0$ ;

3.  $P_0, P_2 \models P_1$ .

**Soluzione:** Calcolando le tavole di verità di  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  si verifica che:

1.  $P_0, P_1 \models P_2$ ;

2.  $P_2, P_1 \not\models P_0$ ;

3.  $P_0, P_2 \models P_1$ .

### Esercizio 4

Sia  $P$  la proposizione  $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg B$ . Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di  $P$ :

1.  $\neg B$

2.  $A \vee B$

3.  $A \wedge \neg B$

4.  $A \rightarrow B$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula  $\neg B$  è conseguenza logica di  $P$  (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

### Esercizio 5

Sia  $P$  la proposizione  $\neg(A \rightarrow B) \vee \neg B$ . Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di  $P$ :

1.  $\neg B$

2.  $A \vee B$

3.  $A \wedge \neg B$

4.  $A \rightarrow B$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula  $\neg B$  è conseguenza logica di  $P$  (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

### Esercizio 6

Sia  $P$  la proposizione  $\neg(A \rightarrow B) \vee B$ . Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di  $P$ :

1.  $\neg A$
2.  $A \wedge B$
3.  $A \vee B$
4.  $A \rightarrow B$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che solo la formula  $A \vee B$  è conseguenza logica di  $P$  (in effetti, si può controllare che è addirittura logicamente equivalente ad essa).

### Esercizio 7

Sia  $P$  la proposizione  $\neg(B \rightarrow A) \vee (B \vee A)$ . Giustificando la propria risposta, verificare quali delle seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti a  $P$ , quali sono conseguenza logica di  $P$ , quali non sono né l'una né l'altra:

1.  $B \rightarrow A$
2.  $\neg B \rightarrow A$
3.  $B$
4.  $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità si ottiene facilmente che:

- $B \rightarrow A$  non è conseguenza logica di  $P$ , quindi non è nemmeno logicamente equivalente ad esso.
- $\neg B \rightarrow A$  è logicamente equivalente a  $P$ .
- $B$  è conseguenza logica di  $P$ , ma non è logicamente equivalente ad esso.
- $\neg(\neg A \wedge \neg B)$  è logicamente equivalente a  $P$ .

### Esercizio 8

Giustificando la propria risposta, determinare se è vero che

$$\neg B \vee A, \neg(C \wedge A) \models C \rightarrow \neg B.$$

**Soluzione:** Utilizzando le tavole di verità si vede che effettivamente l'affermazione è corretta. Alternativamente si può ragionare come segue. Se  $A$  è vera, allora affinché siano vere le premesse della conseguenza logica si deve avere che  $C$  è falsa: ma in tali casi anche l'implicazione  $C \rightarrow \neg B$  è vera. Se invece  $A$  è falsa, allora affinché siano vere le premesse della conseguenza logica si deve avere che  $\neg B$  è vera: ma anche in questo caso l'implicazione  $C \rightarrow \neg B$  risulta automaticamente vera. Perciò in ogni caso (valutazione) in cui le due premesse sono vere anche la conclusione è vera, da cui la conseguenza logica.

**Esercizio 9**

1. Dimostrare mediante tavole di verità che vale la seguente relazione:

$$\neg A \vee \neg B, B \wedge \neg C \models \neg A \rightarrow \neg C$$

2. Dimostrare mediante tavole di verità:

$$A \rightarrow B, C \rightarrow B, \neg B \not\models A \vee C$$

**Soluzione:** (1) Ovviamente basta controllare le 8 righe della tavola di verità. In alternativa, si può ragionare come segue: se  $v$  è una valutazione che rende vere tutte le premesse, in particolare  $v(B \wedge \neg C) = T$ , da cui  $v(\neg C) = T$  e quindi  $v(\neg A \rightarrow \neg C) = T$ .

(2) In questo caso bisogna trovare  $v$  che renda vere tutte le premesse e falsa la conclusione. Per una tale  $v$  si deve avere  $v(A) = v(C) = F$ . Basta prendere  $v$  tale che  $v(B) = F$  per ottenere la conclusione.

**Esercizio 10**

1. Indicare, se esiste, una valutazione delle lettere proposizionali  $A, B, C$  che dimostri che  $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$  non è conseguenza logica di  $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ , motivando la scelta.
2. Si consideri la proposizione “Solo gli studenti che prendono almeno 18 allo scritto possono essere ammessi all'orale”: quale dei seguenti casi esclude?
  - (1) Alice ha preso 18 allo scritto ma non è ammessa all'orale;
  - (2) Bice ha preso 18 allo scritto ed è ammessa all'orale;
  - (3) Carlo ha preso 17 allo scritto ed è ammesso all'orale;
  - (4) Davide ha preso 17 allo scritto e non è ammesso all'orale.

**Soluzione:** (1) Basta considerare la valutazione  $v$  tale che  $v(A) = 1, v(B) = 0$ , o la valutazione  $v'$  tale che  $v'(A) = v'(C) = 0$ .

(2) Il caso (3).

**Esercizio 11**

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$P : \quad A \rightarrow B$$

$$Q : \quad B \rightarrow A$$

$$R : \quad A \vee B$$

Determinare se:

1.  $P, Q \models R$ ;
2.  $Q, R \models P$ ;
3.  $P, R \models Q$ .

**Soluzione:** Si ha che  $P_1, \dots, P_n \models Q$  se e solo se la formula  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di  $P$ ,  $Q$  e  $R$  si verifica che:

1.  $P, Q \not\models R$  poichè la formula  $P \wedge Q \rightarrow R$  non è una tautologia (è falsa se  $A$  e  $B$  sono entrambe false);
2.  $Q, R \not\models P$  poichè la formula  $Q \wedge R \rightarrow P$  non è una tautologia (è falsa se  $B$  è falsa e  $A$  è vera);
3.  $P, R \not\models Q$  poichè la formula  $P \wedge R \rightarrow Q$  non è una tautologia (è falsa se  $A$  è falsa e  $B$  è vera);

### Esercizio 12

Data la formula proposizionale

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \rightarrow \neg C)$$

indicare quali delle seguenti formule ne sono conseguenze logiche:

1.  $A$
2.  $B$
3.  $A \vee B \vee C$
4.  $\neg A \vee (\neg A \rightarrow \neg C)$

**Soluzione:** Solo (4) è conseguenza logica della formula. Negli altri casi per avere controesempi basta considerare  $A = F, B = F, C = F$ .

### Esercizio 13

Data la seguente formula proposizionale  $P$

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C),$$

quali delle seguenti formule **non** sono conseguenze logiche di  $P$ ?

1.  $(C \rightarrow B) \rightarrow \neg A$
2.  $A \vee C$
3.  $\neg C$
4.  $(A \wedge B) \rightarrow C$

**Soluzione:** Solo 1 e 4 non sono conseguenze logiche della formula. Infatti, per 1 basta considerare il caso in cui  $A$  è vero e  $B, C$  falsi; per 4 basta considerare il caso in cui  $A, B$  sono veri e  $C$  falso.

**Esercizio 14**

Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di conseguenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1.  $\neg A \vee \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$
2.  $A \rightarrow B \models A \vee B$
3.  $\neg B \rightarrow \neg A \models \neg A \vee B$
4.  $\neg A \wedge \neg B \models \neg A \rightarrow \neg B$

**Soluzione:** (1) non vale, per esempio, se  $A$  è falsa e  $B$  vera. (2) è falsa quando  $A, B$  sono false. (3) è vera, ed esprime una forma della legge di contrapposizione. (4) è vera.

**Esercizio 15**

Verificare se la seguente affermazione è valida o meno:

$$P \vee Q, (R \wedge P) \rightarrow Q, \neg R \not\models P$$

**Soluzione:** Basta osservare che la valutazione  $v$  tale che  $v(Q) = 1, v(P) = v(R) = 0$  rende vere tutte le premesse e falsa la conclusione per concludere che  $P$  non è conseguenza logica di  $P \vee Q, (R \wedge P) \rightarrow Q, \neg R$ .  
(2) (a), (c) e (d).

**Esercizio 16**

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} P_0 &: B \wedge \neg A \\ P_1 &: C \vee \neg B \\ P_2 &: C \leftrightarrow (\neg A \wedge B) \end{aligned}$$

Determinare se:

1.  $P_0 \models P_2 \vee P_1$ ;
2.  $P_1 \models P_0 \wedge P_2$ ;
3.  $P_0, P_1 \models P_2$ .

**Soluzione:** Si ha che  $P_1, \dots, P_n \models Q$  se e solo se la formula  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  è una tautologia.

Calcolando le tavole di verità di  $P_0, P_1$  e  $P_2$  si verifica che:

1.  $P_0 \not\models P_2 \vee P_1$  poichè la formula  $P_0 \rightarrow P_2 \vee P_1$  non è una tautologia (è falsa se  $C$  e  $A$  sono entrambe false e  $B$  è vera);
2.  $P_1 \not\models P_0 \wedge P_2$  poichè la formula  $P_1 \rightarrow P_0 \wedge P_2$  non è una tautologia (è falsa se  $C$  e  $A$  sono entrambe vere);
3.  $P_0, P_1 \models P_2$  poichè la formula  $P_0 \wedge P_1 \rightarrow P_2$  è una tautologia.

### Esercizio 17

Usare il calcolo proposizionale per risolvere il seguente problema:

Alessandro, Beatrice e Carlo vanno al ristorante. Se Alessandro ordina una pizza altrettanto fa Beatrice; Beatrice o Carlo, ma non entrambi, ordinano una pizza; Alessandro o Carlo, o entrambi, ordinano una pizza. Se Carlo ordina una pizza, altrettanto fa Alessandro. Chi ordina una pizza?

**Soluzione:**  $A \rightarrow B$ ,  $B \oplus C$ ,  $A \vee C$ ,  $C \rightarrow A$  sono vere. Poiché  $C \rightarrow A$  è equivalente a  $\neg C \vee A$ , e dato che vale  $A \vee C$ , segue  $A$ , quindi  $B$ , quindi  $\neg C$ . Riassumendo: Alessandro e Beatrice ordinano la pizza, Carlo no.

### Esercizio 18

Siano date le formule

$$P : \quad A \vee B \vee C$$

$$Q : \quad \neg A \rightarrow B$$

$$R : \quad \neg C \rightarrow A$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1.  $Q \models P$
2.  $R \models P$
3.  $R \vee Q \equiv P$

**Soluzione:** Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che  $Q$  è vera anche  $P$  lo è, quindi  $Q \models P$  (si può osservare che  $Q$  ha la stessa tavola di verità di  $A \vee B$ : quindi se  $A \vee B$  è vera, chiaramente lo è anche  $A \vee B \vee C$ ).
2. Ogni volta che  $R$  è vera anche  $P$  lo è, quindi  $R \models P$  (basta osservare che  $R$  ha la stessa tavola di verità di  $C \vee A$ : quindi se  $C \vee A$  è vera, lo è anche  $A \vee B \vee C$ ).
3.  $R \vee Q$  e  $P$  hanno la stessa tavola di verità e quindi sono logicamente equivalenti.

### Esercizio 19

Siano date le formule

$$P : \quad (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$$

$$Q : \quad \neg B \rightarrow A$$

$$R : \quad \neg B \rightarrow \neg C$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1.  $P, Q \models R$
2.  $R, P \models Q$
3.  $P \wedge Q \equiv R$

**Soluzione:** Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che in cui sia  $Q$  che  $P$  sono vere, anche  $R$  lo è; quindi  $P, Q \models R$ .
2. Se  $C, B, A$  sono tutte false si ha che  $R$  e  $P$  sono entrambe vere, mentre  $Q$  è falsa, quindi  $R, P \not\models Q$ .
3.  $P \wedge Q$  e  $R$  non hanno la stessa tavola di verità e quindi non sono logicamente equivalenti (se  $C, B, A$  sono tutte false,  $P \wedge Q$  è falso mentre  $R$  è vera).

**NOTA BENE:** Anche se in questa soluzione le tavole di verità delle tre formule non vengono presentate, si raccomanda di riportare le tavole nella soluzione a tutti gli studenti che le utilizzano come strumento per risolvere l'esercizio.

### Esercizio 20

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} Q_0 &: \neg A \rightarrow C \\ Q_1 &: \neg A \rightarrow \neg B \\ Q_2 &: (B \vee \neg C) \rightarrow A \end{aligned}$$

Determinare se:

1.  $Q_0, Q_1 \models Q_2$ ;
2.  $Q_2 \models Q_0 \wedge Q_1$ ;
3.  $Q_0 \vee Q_1 \equiv Q_2$ .

**Soluzione:**

$$P_0, \dots, P_n \models Q$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra  $P_0, \dots, P_n, Q$  che rende vera tutte le formule  $P_0, \dots, P_n$ , rende vera anche  $Q$ .

$$P \equiv Q$$

se e solo se

$$P \models Q \text{ e } Q \models P$$

se e solo se  $P$  e  $Q$  hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che  $Q_0$  e  $Q_1$  sono vere, lo è anche  $Q_2$ .  
Quindi  $Q_0, Q_1 \models Q_2$ .
2. Ogni volta che  $Q_2$  è vera lo sono anche  $Q_1$  e  $Q_0$ , e quindi lo è anche  $Q_0 \wedge Q_1$ .  
Quindi  $Q_2 \models Q_0 \wedge Q_1$ .
3.  $Q_0 \vee Q_1$  e  $Q_2$  non hanno la stessa tavola di verità e quindi non sono logicamente equivalenti.

**Esercizio 21**

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} S_0 &: \quad \neg C \leftrightarrow A \\ S_1 &: \quad \neg A \leftrightarrow B \\ S_2 &: \quad B \rightarrow (A \vee C) \end{aligned}$$

Determinare se:

1.  $S_0, S_1 \models S_2$ ;
2.  $S_2 \models S_0 \wedge S_1$ ;
3.  $S_2 \equiv S_1 \vee S_0$ .

**Soluzione:**

$$P_0, \dots, P_n \models Q$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra  $P_0, \dots, P_n, Q$  che rende vera tutte le formule  $P_0, \dots, P_n$ , rende vera anche  $Q$ .

$$P \equiv Q$$

se e solo se

$$P \models Q \text{ e } Q \models P$$

se e solo se  $P$  e  $Q$  hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che  $S_0$  e  $S_1$  sono vere, lo è anche  $S_2$ .  
Quindi  $S_0, S_1 \models S_2$ .
2. Se  $B$  e  $A$  sono vere,  $S_2$  è vera mentre  $S_1$  è falsa, quindi lo è anche  $S_0 \wedge S_1$ .  
Quindi  $S_2 \not\models S_0 \wedge S_1$ .
3.  $S_1 \vee S_0$  e  $S_2$  non hanno la stessa tavola di verità (per esempio se  $A$  e  $C$  sono false e  $B$  è vera si ha che  $S_2$  è falsa, mentre  $S_1 \vee S_0$  è vera), quindi non sono logicamente equivalenti.

**Esercizio 22**

Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} Q_0 &: \quad (\neg C \wedge A) \vee (C \wedge \neg A) \\ Q_1 &: \quad (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \\ Q_2 &: \quad \neg B \vee A \vee C \end{aligned}$$

Giustificando le proprie risposte, determinare se:

1.  $Q_0, Q_1 \models Q_2$ ;
2.  $Q_2 \models Q_0 \wedge Q_1$ ;

3.  $Q_2 \equiv Q_1 \vee Q_0$ .

**Soluzione:**

$$P_0, \dots, P_n \models Q$$

se e solo se ogni interpretazione delle variabili proposizionali che compaiono in almeno una tra  $P_0, \dots, P_n, Q$  che rende vera tutte le formule  $P_0, \dots, P_n$ , rende vera anche  $Q$ .

$$P \equiv Q$$

se e solo se

$$P \models Q \text{ e } P \models Q$$

se e solo se  $P$  e  $Q$  hanno la stessa tavola di verità.

Le tavole di verità delle tre formule mostrano che:

1. Ogni volta che  $Q_0$  e  $Q_1$  sono vere, lo è anche  $Q_2$ .  
Quindi  $Q_0, Q_1 \models Q_2$ .
2. Se  $B$  e  $A$  sono vere,  $Q_2$  è vera mentre  $Q_1$  è falsa, quindi lo è anche  $Q_0 \wedge Q_1$ .  
Quindi  $Q_2 \not\models Q_0 \wedge Q_1$ .
3.  $Q_1 \vee Q_0$  e  $Q_2$  non hanno la stessa tavola di verità (per esempio se  $A$  e  $C$  sono false e  $B$  è vera si ha che  $Q_2$  è falsa, mentre  $Q_1 \vee Q_0$  è vera), quindi non sono logicamente equivalenti.

## 4 Logica del prim'ordine: semantica

### Esercizio 1

Sia  $L = \{R, f\}$ , dove  $R$  simbolo di relazione binario e  $f$  simbolo di funzione binario. Sia  $\varphi$  la seguente formula

$$\forall x \exists y R(f(x, y), z).$$

1. Sottolineare (nel caso in cui ve ne siano) ciascuna occorrenza libera di variabile in  $\varphi$ .
2. Determinare se  $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/5, z/0]$  dove  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, + \rangle$ .
3. Determinare per quali valori di  $k \in \mathbb{Z}$  si ha che  $\mathcal{B} \models \varphi[x/2, y/5, z/k]$  dove  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, \geq, \cdot \rangle$ .

Giustificare le proprie risposte.

*Suggerimento.* Nel terzo punto distinguere i casi  $k \leq 0$  e  $k > 0$ .

### Soluzione:

1.  $\forall x \exists y R(f(x, y), z)$ .
2. Bisogna determinare se è vero in  $\mathbb{N}$  che per ogni  $x \in \mathbb{N}$  esiste  $y \in \mathbb{N}$  tale che  $x + y \leq 0$ . Osserviamo che se  $x > 0$  non ci può essere alcun  $y \in \mathbb{N}$  tale che  $x + y \leq 0$ : infatti qualunque sia  $y$  si avrebbe  $0 < x \leq x + y$ . Di conseguenza abbiamo verificato che  $\mathcal{A} \not\models \varphi[x/2, y/5, z/0]$ .
3. Si ha  $\mathcal{B} \models \varphi[x/2, y/5, z/k]$  se e solo se  $k \leq 0$ . Bisogna infatti determinare per quali  $k \in \mathbb{Z}$  si ha che per ogni  $x \in \mathbb{Z}$  esiste  $y \in \mathbb{Z}$  tale che  $x \cdot y \geq k$ . Se  $k \leq 0$ , allora dato qualunque  $x \in \mathbb{Z}$  basterà porre  $y = 0$  ottenendo  $x \cdot y = x \cdot 0 = 0 \geq k$ . Se invece  $k > 0$ , posto  $x = 0$  non si potrà trovare un  $y \in \mathbb{Z}$  per cui  $x \cdot y \geq k$ , perché in ogni caso si avrà  $x \cdot y = 0 \cdot y = 0 < k$ .

### Esercizio 2

Sia  $L = \{f\}$  un linguaggio costituito da un unico simbolo di funzione binario. Sia  $\varphi$  la formula

$$\forall y \forall z (f(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x).$$

1. Determinare tutti gli  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \models \varphi[x/n]$ .
2. Determinare tutti gli  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[x/n]$ .
3. Dimostrare che  $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/3]$ .

Giustificare le proprie risposte.

### Soluzione:

1. L'interpretazione di  $\varphi$  nella struttura data è:

Per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$ , se  $i \cdot j = x$  allora  $i = x$  oppure  $j = x$ .

Quindi  $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \models \varphi[x/n]$  se e solo se  $n = 0$ ,  $n = 1$  oppure  $n$  è un numero primo.

2. L'interpretazione di  $\varphi$  nella struttura data è:

Per ogni  $i, j \in \mathbb{N}$ , se  $i + j = x$  allora  $i = x$  oppure  $j = x$ .

Se  $n > 1$ , allora  $n = i + j$  con  $i = n - 1$  e  $j = 1$ : siccome  $n \neq n - 1$  e, nel nostro caso,  $n \neq 1$ , si ha  $\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \varphi[x/n]$ . D'altra parte, se  $i + j = 1$  allora  $i = 1$  e  $j = 0$ , oppure  $i = 0$  e  $j = 1$ ; inoltre se  $i + j = 0$  allora  $i = j = 0$ . Quindi  $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[x/n]$  se e solo se  $n = 0$  oppure  $n = 1$ .

3. L'interpretazione di  $\varphi$  nella struttura data è:

Per ogni  $i, j \in \mathbb{Z}$ , se  $i \cdot j = x$  allora  $i = x$  oppure  $j = x$ .

Poiché  $3 = (-3) \cdot (-1)$  ma  $3 \neq -3$  e  $3 \neq -1$ , ponendo  $i = -3$  e  $j = -1$  si vede che  $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/3]$ .

**Esercizio 3**

Sia  $L = \{f, g, c\}$ , dove  $f$  e  $g$  sono simboli di funzione binari e  $c$  è un simbolo di costante. Sia  $\varphi$  la formula

$$\forall x \forall y (f(g(x, x), c) = f(c, g(y, y)) \rightarrow x = y).$$

1. Dimostrare che  $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$ .
2. Dimostrare che  $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi$ .

**Soluzione:**

1. L'interpretazione di  $\varphi$  in  $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  è

Per ogni  $x, y \in \mathbb{N}$ , se  $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$  allora  $x = y$ .

Chiaramente  $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$  se e solo se  $x^2 = y^2$ . Ma in  $\mathbb{N}$  si ha che se  $n, m \in \mathbb{N}$  sono diversi, allora  $n^2 \neq m^2$ . Quindi è vero che se  $x^2 = y^2$  allora  $x = y$ , perciò  $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$ .

2. L'interpretazione di  $\varphi$  in  $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  è

Per ogni  $x, y \in \mathbb{Z}$ , se  $(x \cdot x) + 0 = 0 + (y \cdot y)$  allora  $x = y$ .

Ponendo ad esempio  $x = 10$  e  $y = -10$  si ha che

$$(10 \cdot 10) + 0 = 100 + 0 = 0 + 100 = 0 + ((-10) \cdot (-10)),$$

ma chiaramente  $1 \neq -1$ : quindi  $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi$ .

*Osservazione:* Al posto di 10 e -10, si poteva prendere qualunque intero non nullo  $k$  e porre  $x = k$  e  $y = -k$ .

3. Le due strutture non possono essere isomorfe perché non soddisfano gli stessi enunciati, come testimoniato dall'enunciato  $\varphi$  stesso.

**Esercizio 4**

Sia  $\varphi$  la formula

$$\exists x \forall y R(x, y)$$

e  $\psi$  la formula

$$\forall y \exists x R(x, y)$$

dimostrare che  $\psi \not\models \varphi$ .

**Soluzione:** Consideriamo la  $\mathcal{L}$ -struttura  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \geq)$  con  $\mathcal{L} = \{R\}$  e  $\leq$  interpretazione del simbolo di relazione binaria  $\mathcal{L}$ .

L'interpretazione di  $\phi$  in  $\mathcal{N}$  asserisce che esiste un numero maggiore o uguale di tutti gli altri, e quindi è falsa. Invece l'interpretazione di  $\psi$  in  $\mathcal{N}$  asserisce che ogni numero  $n$  ha un altro numero  $m$  che ne è maggiore o uguale ed è quindi vera.

Quindi  $\mathcal{N}$  testimonia che  $\phi$  non è conseguenza logica di  $\psi$

### Esercizio 5

Sia  $L = \{R, f, a, c\}$  un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario  $R$ , un simbolo di funzione binario  $f$  e due simboli di costante  $a$  e  $c$ . Sia  $\varphi$  l'enunciato

$$\forall x (\exists y R(y, f(x, y)) \rightarrow \exists z (R(a, z) \wedge R(z, x)))$$

e sia  $\psi$  l'enunciato

$$\forall x \forall z (\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c)) \rightarrow R(z, x) \vee R(f(x, c), z))$$

Per ciascuna delle seguenti  $L$ -strutture, determinare se gli enunciati  $\varphi$  e  $\psi$  sono veri in esse oppure no.

- $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 0, 1 \rangle$
- $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 0, 1 \rangle$

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:** In entrambe le strutture, l'interpretazione di  $\varphi$  è

Per ogni  $x$ , se per qualche  $y$  si ha che  $y < x+y$  allora c'è un  $z$  strettamente compreso tra 0 e  $x$ .

mentre l'interpretazione di  $\psi$  è

Per ogni  $x$  e  $z$ , se  $z$  è diverso sia da  $x$  che da  $x+1$  allora o  $z < x$  oppure  $x+1 < z$ . (Equivalentemente: per ogni  $x$  non c'è alcun  $z$  strettamente compreso tra  $x$  e  $x+1$ .)

Quindi si ha che:

- In  $\mathcal{Q}$  la formula  $\varphi$  è vera (cioè  $\mathcal{Q} \models \varphi$ ). Infatti un arbitrario numero razionale  $x$  soddisfa la premessa dell'implicazione ("per qualche  $y$  si ha che  $y < x+y$ ") se e solo se  $x > 0$ , e in tal caso è vero che c'è un  $z$  tale che  $0 < z < x$ .

- In  $\mathcal{N}$  la formula  $\varphi$  è invece falsa (cioè  $\mathcal{N} \not\models \varphi$ ). Infatti un arbitrario numero naturale  $x$  soddisfa la premessa dell'implicazione ("per qualche  $y$  si ha che  $y < x + y$ ") se e solo se  $x \neq 0$ . Tuttavia, ponendo  $x = 1$  si ha un numero che soddisfa la premessa dell'implicazione ma non la sua conclusione (non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra 0 e 1).
- Si ha che  $\mathcal{Q} \not\models \psi$ . Infatti, ponendo  $x = 0$  e  $z = \frac{1}{2}$  si ha che  $z$  è strettamente compreso tra 0 e  $0 + 1$ .
- Al contrario,  $\mathcal{N} \models \psi$  perché non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra due numeri consecutivi arbitrari (ovvero tra due numeri del tipo  $x$  e  $x + 1$ ).

**Esercizio 6**

Sia  $L = \{f, g\}$  un linguaggio del prim'ordine, dove  $f$  e  $g$  sono entrambi simboli di funzione binari. Sia  $\varphi(x)$  la formula

$$f(x, x) = g(x, x).$$

Consideriamo le due  $L$ -strutture seguenti:

- $\mathcal{R}_0 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
- $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}, +, - \rangle$

Giustificando la propria risposta, determinare tutti gli  $r \in \mathbb{R}$  per cui si ha

$$\mathcal{R}_0 \models \varphi[x/r]$$

e tutti gli  $r \in \mathbb{R}$  per cui vale

$$\mathcal{R}_1 \models \varphi[x/r].$$

**Soluzione:** L'interpretazione di  $\varphi(x)$  in  $\mathcal{R}_0$  è

$$x + x = x \cdot x,$$

ovvero

$$x^2 = 2x.$$

Quindi  $\mathcal{R}_0 \models \varphi[r]$  se e solo se  $r = 0$  oppure  $r = 2$ .

Similmente, l'interpretazione di  $\varphi(x)$  in  $\mathcal{R}_1$  è

$$x + x = x - x,$$

ovvero

$$2x = 0.$$

Quindi  $\mathcal{R}_1 \models \varphi[r]$  se e solo se  $r = 0$ .

**Esercizio 7**

Sia  $L = \{R, f, c\}$  un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario  $R$ , un simbolo di funzione binario  $f$  e un simbolo di costante  $c$ . Sia  $\varphi$  la formula

$$\forall x (\neg \exists y (f(y, y) = x) \rightarrow R(f(z, c), x)).$$

Consideriamo la  $L$ -struttura  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$ .

1. Dire se  $\varphi$  è un enunciato oppure no, e nel secondo caso cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che  $\mathcal{N} \models \varphi[x/0, y/0, z/0]$ ?
3. Trovare un'assegnazione  $x/n, y/m, z/k$  tale che  $\mathcal{N} \not\models \varphi[x/n, y/m, z/k]$ .
4. Determinare se è vero che  $\mathcal{N} \models \forall z\varphi$ .

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. Non è un enunciato. C'è solo un'occorrenza libera di variabile, ovvero l'unica occorrenza di  $z$ .
2. L'interpretazione di  $\varphi$  in  $\mathcal{N}$  è: "Per ogni  $x$  dispari si ha che  $z + 1 \leq x$ ". Se  $\alpha_1(z) = 0$  allora si ha che  $\mathcal{N} \models \varphi[\alpha_1]$  poiché è vero (in  $\mathbb{N}$ ) che  $\alpha_1(z) + 1$ , ovvero il numero 1, è minore o uguale di tutti i numeri dispari.
3. Per quanto detto prima, un'assegnazione  $\alpha_2$  tale che  $\alpha_2(z) = 1$  rende falsa la formula in  $\mathcal{N}$ : infatti se  $x = 1$  si ha che  $x$  è dispari ma non è vero che  $\alpha_2(z) + 1$ , ovvero il numero 2, è minore o uguale di 1.
4. La formula  $\forall z\varphi$  è falsa in  $\mathcal{N}$  per il punto precedente (si ricordi che per definizione  $\mathcal{N} \models \forall z\varphi$  se e solo se  $\mathcal{N} \models \varphi[\alpha_{z \rightarrow n}]$  per ogni assegnazione  $\alpha$  ed ogni  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Esercizio 8**

Sia  $L = \{R, P, c\}$  un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario  $R$ , un simbolo di relazione unario  $P$ , e un simbolo di costante  $c$ . Sia  $\varphi$  l'enunciato

$$\exists y P(y) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow R(c, x))$$

e sia  $\psi$  l'enunciato

$$\forall x R(c, x)$$

Dimostrare che

$$\varphi \not\models \psi.$$

**Soluzione:** Consideriamo la  $L$ -struttura  $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq, \mathbb{N}, 0)$ . Allora  $\varphi$  interpretata in  $\mathcal{Z}$  vuol dire "esiste un numero naturale, e ogni numero naturale è maggiore o uguale a 0", mentre  $\psi$  interpretata in  $\mathcal{Z}$  vuol dire "ogni intero è maggiore o uguale a 0". Quindi  $\mathcal{Z} \models \varphi$  ma  $\mathcal{Z} \not\models \psi$ , per cui  $\varphi \not\models \psi$ .

**Esercizio 9**

Trovare l'insieme di verità in  $\langle \mathbb{N}, |, 1 \rangle$  (dove i simboli  $|$  e 1 sono interpretati nella maniera naturale) della seguente formula:

$$\exists y (y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x).$$

**Soluzione:** L'insieme di verità è l'insieme dei numeri che non sono primi e diversi da 1.

**Esercizio 10**

Dimostrare che il seguente enunciato non è logicamente valido

$$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

costruendo una opportuna struttura in cui l'enunciato risulti falso.

**Soluzione:** Basta prendere una struttura  $\mathcal{A}$  di supporto  $\mathbb{N}$  in cui  $P^{\mathcal{A}}$  è l'insieme dei numeri pari e  $Q^{\mathcal{A}}$  è l'insieme dei numeri dispari.

**Esercizio 11**

Dimostrare che la formula  $\forall x (C(x) \rightarrow S(x))$  non è conseguenza logica delle formule

$$\forall x (R(x) \rightarrow S(x)), \forall x (R(x) \rightarrow C(x)).$$

**Soluzione:**

**Esercizio 12**

Trovare l'insieme di verità in  $\mathbb{N}$  della seguente formula:

$$\exists y (y \mid x \wedge P(y) \wedge \forall z (z \mid x \wedge P(z) \rightarrow z = y),)$$

dove  $\mid$  denota la relazione di divisibilità e  $P$  il predicato per essere un numero primo.

**Soluzione:** L'insieme di verità è l'insieme dei numeri della forma  $p^n$  con  $p$  primo e  $n \geq 1$ .

**Esercizio 13**

Sia  $L$  un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario  $P$ . Sia  $\mathcal{A}$  la  $L$ -struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone e  $a P^{\mathcal{A}} b$  se e solo se  $a$  è genitore di  $b$ . Trovare una formula  $\varphi(x)$  il cui insieme di verità in  $\mathcal{A}$  è l'insieme delle persone che sono zio/zia di qualcuno.

**Soluzione:**

$$\varphi(x) : \quad \exists u \exists y \exists z (u P x \wedge u P y \wedge y P z \wedge x \neq y)$$

**Esercizio 14**

Sia  $L$  un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo funzionale binario  $\cdot$ . Sia  $\mathcal{A}$  la  $L$ -struttura il cui universo è l'insieme  $\mathbb{N}$  e in cui  $\cdot^{\mathcal{A}}$  è la moltiplicazione. Trovare una formula  $\varphi(x, y)$  il cui insieme di verità in  $\mathcal{A}$  è la relazione che vale tra  $x$  e  $y$  quando hanno un divisore in comune.

**Soluzione:**

$$\varphi(x, y) : \quad \exists u \exists v \exists c ((u \cdot c = x) \wedge (v \cdot c = y) \wedge \neg(u = x))$$

(La formula  $\neg(u = x)$  serve ad escludere il caso in cui il divisore comune  $c$  è 1.)

**Esercizio 15**

Dimostrare, costruendo una opportuna struttura, che

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x (R(x) \wedge \neg Q(x)) \not\models \exists x (R(x) \wedge P(x))$$

per un linguaggio del prim'ordine con simboli predicativi unari  $P, Q, R$ .

**Soluzione:**

**Esercizio 16**

Dimostrare che

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x (Q(x) \wedge R(x)) \not\models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

**Soluzione:** È sufficiente trovare una struttura  $\mathcal{M}$  in cui la premessa è vera ma la conclusione è falsa, e questo accade quando

- $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$ ,
- $Q^{\mathcal{M}} \cap R^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ ,
- $P^{\mathcal{M}} \not\subseteq R^{\mathcal{M}}$ .

Queste condizioni sono soddisfatte, ad esempio, nella struttura  $\mathcal{M}$  dove

- $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$ ,
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$ ,
- $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ ,
- $R^{\mathcal{M}} = \{b\}$ .

**Esercizio 17**

Sia  $L = \{R\}$  un linguaggio costituito da un unico simbolo di relazione binario. Si considerino le  $L$ -strutture

- $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ , dove  $|$  è la relazione di divisibilità tra numeri naturali;
- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ;
- $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$ .

Stabilire quali tra le precedenti  $L$ -strutture è un modello dell'enunciato

$$\exists x \exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x)).$$

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. La  $L$ -struttura  $(\mathbb{N}, |)$  soddisfa l'enunciato  $\exists x \exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$ , mentre le altre  $L$ -strutture proposte no.
2.  $(\mathbb{N}, |)$  non è isomorfa a nessuna delle altre strutture per il punto precedente. Le due strutture  $(\mathbb{Z}, \leq)$  e  $(\mathbb{Z}, \geq)$  risultano invece isomorfe mediante la funzione

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto -x.$$

**Esercizio 18**

Sia  $L = \{P\}$  con  $P$  simbolo di relazione binario. Consideriamo la  $L$ -struttura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle,$$

dove  $|$  è l'usuale relazione di divisibilità. Sia  $\varphi(x)$  la  $L$ -formula

$$\neg \forall y P(x, y) \wedge \forall z (P(z, x) \wedge \neg(z = x) \rightarrow \forall y P(z, y)).$$

1. Quali delle tre affermazioni seguenti sono corrette?

$$\mathcal{A} \models \varphi(x)[x/1] \qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/3] \qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/4]$$

2. Determinare l'insieme di verità di  $\varphi(x)$  in  $\mathcal{A}$ .

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:** Dato  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  si ha che

- $\mathcal{A} \models \neg \forall y P(x, y)[x/n]$  se e solo se  $n \neq 1$ ;
- $\mathcal{A} \models \forall z (P(z, x) \wedge \neg(z = x) \rightarrow \forall y P(z, y))[x/n]$  se e solo se ogni divisore di  $n$  diverso da  $n$  stesso coincide con 1 (in altre parole: gli unici divisori di  $n$  sono 1 ed  $n$  stesso).

Di conseguenza

1.  $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)[x/1]$  per il primo punto,  $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)[x/4]$  per il secondo punto, mentre  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[x/3]$ .
2. Ricordiamo che, per definizione, l'insieme di verità di  $\varphi$  in  $\mathcal{A}$  è

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \mathcal{A} \models \varphi[x/n]\}.$$

Quindi

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \text{ è un numero primo}\}.$$

**Esercizio 19**

Sia  $L = \{f\}$  con  $f$  simbolo di funzione binario. Sia  $\varphi(x)$  la  $L$ -formula

$$\exists y (f(y, y) = x).$$

1. Determinare l'insieme di verità di  $\varphi(x)$  nella  $L$ -struttura  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ .
2. Determinare l'insieme di verità di  $\varphi(x)$  nella  $L$ -struttura  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ .
3. Sia  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ , dove  $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ . È vero che  $\mathcal{C} \models \forall x \varphi(x)$ ?

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. L'interpretazione di  $\varphi(x)$  in  $\mathcal{A}$ : “Esiste un numero naturale  $y$  tale che  $x = y + y$  (ovvero  $x = 2y$ )”. Dunque

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un numero pari}\}.$$

2. L'interpretazione di  $\varphi(x)$  in  $\mathcal{B}$ : “Esiste un numero reale  $y$  tale che  $x = y \cdot y$  (ovvero  $x = y^2$ )”. Quindi

$$\varphi(\mathcal{B}) = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}.$$

3. Per quanto visto al punto precedente, si ha che  $\mathcal{C} \models \forall x \varphi(x)$ : infatti, tutti i numeri reali strettamente positivi sono il quadrato di un numero reale strettamente positivo.

**Esercizio 20**

Sia  $L = \{f, a\}$  con  $f$  simbolo di funzione unario e  $a$  simbolo di costante. Sia  $\varphi$  l'enunciato

$$\forall x (\neg(x = a) \rightarrow \exists y (f(y) = x)).$$

Giustificando le proprie risposte, determinare quali delle seguenti  $L$ -strutture soddisfano  $\varphi$ .

1.  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, 0 \rangle$ , dove  $f^{\mathcal{A}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è definita da  $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$ ;
2.  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, f^{\mathcal{B}}, 0 \rangle$ , dove  $f^{\mathcal{B}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  è definita da  $f^{\mathcal{B}}(q) = q + 1$ ;
3.  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{C}}, 0 \rangle$ , dove  $f^{\mathcal{C}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  è definita da  $f^{\mathcal{C}}(z) = 2z$ ;

**Soluzione:**

1. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\mathcal{A}$  afferma che

Per ogni numero naturale  $n$  diverso da 0 esiste un numero naturale  $m$  tale che  $n = m + 1$  (ovvero  $n$  è il successore di  $m$ ).

Quindi si ha che  $\mathcal{A} \models \varphi$ : dato un qualunque  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  basta considerare  $m = n - 1$ .

2. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\mathcal{B}$  afferma che

Per ogni numero razionale  $q$  diverso da 0 esiste un numero razionale  $p$  tale che  $q = p + 1$ .

Quindi si ha che  $\mathcal{B} \models \varphi$ : dato un qualunque  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  basta considerare  $p = q - 1$ .

[Si noti che, a differenza del punto precedente, la formula a destra dell'implicazione è in realtà verificata in  $\mathcal{B}$  anche quando  $q = 0$ .]

3. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\mathcal{C}$  afferma che

Per ogni numero intero  $z$  diverso da 0 esiste un numero intero di cui  $z$  è il doppio.

In questo caso si ha che  $\mathcal{C} \not\models \varphi$ : se ad esempio  $z = 5$  si ha che  $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ma  $z$  non è il doppio di alcun numero intero.

**Esercizio 21**

Sia  $L = \{P, R, a\}$  con  $P$  ed  $R$  simboli di relazione binaria e  $a$  simbolo di costante. Consideriamo la  $L$ -struttura  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, |, 2 \rangle$ , dove  $|$  è l'usuale relazione di divisibilità.

Siano  $\varphi$  l'enunciato

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge R(a, y))$$

e  $\psi$  l'enunciato

$$\exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow R(a, y))$$

1. Determinare se  $\mathcal{A} \models \varphi$ .
2. Determinare se  $\mathcal{A} \models \psi$ .
3. Determinare se  $\varphi \models \psi$ .

Giustificare le proprie risposte.

**Soluzione:**

1. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\mathcal{A}$  afferma che

Vi sono numeri pari arbitrariamente grandi.

Quindi si ha che  $\mathcal{A} \models \varphi$ .

2. L'enunciato  $\psi$  interpretato in  $\mathcal{A}$  afferma che

Tutti i numeri naturali sufficientemente grandi sono pari.

Quindi si ha che  $\mathcal{A} \not\models \psi$ .

3. Poiché  $\mathcal{A} \models \varphi$  ma  $\mathcal{A} \not\models \psi$ , per definizione di conseguenza logica si ha che  $\varphi \not\models \psi$ .

**Esercizio 22**

Sia  $L = \{P\}$  con  $P$  simbolo di relazione binaria. Sia  $\varphi$  l'enunciato

$$\forall x \exists y \neg P(x, y).$$

1. Determinare se  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models \varphi$ .
2. Determinare se  $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$ .
3. L'enunciato  $\varphi$  è soddisfacibile? È valido?

Giustificare le proprie risposte.

### Soluzione:

1. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  afferma che

Per ogni numero naturale  $x$  esiste un numero naturale  $y$  tale che  $x \not\leq y$   
(ovvero tale che  $y < x$ ).

Ma se  $x = 0$ , un tale  $y$  non può esistere (0 è il più piccolo tra i numeri naturali).  
Quindi  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \not\models \varphi$ .

2. L'enunciato  $\varphi$  interpretato in  $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$  afferma che

Per ogni numero naturale  $x$  esiste un numero naturale  $y$  tale che  $x \not\geq y$   
(ovvero tale che  $x < y$ ).

Questo equivale a dire che ci sono numeri naturali arbitrariamente grandi, quindi  
 $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle \models \varphi$ .

3. Per quanto visto ai punti precedenti,  $\varphi$  è soddisfacibile (è vero, ad esempio, in  $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ ) ma non valido (per esempio non è soddisfatto in  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ).

## 5 Logica del prim'ordine: formalizzazione

### Esercizio 1

Formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la seguente affermazione

La somma di tre numeri dispari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo  $+$  (interpretato nella maniera usuale).

*Suggerimento.* Scrivere prima una  $L$ -formula  $P(x)$  che formalizzi “ $x$  è un numero pari”.

**Soluzione:** Sia  $P(x)$  la formula

$$\exists z(z + z = x)$$

che asserisce che  $x$  è un numero pari. Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z)) \rightarrow P(x + y + z)).$$

### Esercizio 2

Formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la seguente affermazione

Il doppio di un numero pari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli  $+$  e  $1$  (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo  $|$  per la relazione di divisibilità.

*Suggerimento.* Scrivere prima una  $L$ -formula  $P(w)$  che formalizzi “ $w$  è un numero pari”.

**Soluzione:** Sia  $P(w)$  la formula

$$(1 + 1) | w$$

che asserisce che  $w$  è un numero divisibile per 2 (ovvero un numero pari). Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall x (P(x) \rightarrow P(x + x)).$$

### Esercizio 3

Formalizzare in  $\mathbb{Q}$  la seguente affermazione

Il quadrato di un numero strettamente negativo è strettamente positivo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli  $\cdot$  e  $<$  (interpretati nella maniera usuale).

*Suggerimento.* Scrivere prima una  $L$ -formula  $Z(w)$  che formalizzi “ $w$  è il numero 0”.

**Soluzione:** Sia  $Z(w)$  la formula

$$\forall y (w \cdot y = w)$$

che asserisce che  $w$  è il numero 0. Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall x \forall w (Z(w) \wedge x < w \rightarrow w < x \cdot x).$$

### Esercizio 4

1. Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la frase

Esiste un numero naturale che è la radice quadrata di  $y$ .

utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $<$  e  $\cdot$  interpretati nella maniera usuale.

2. Utilizzando lo stesso linguaggio, formalizzare in  $\mathbb{N}$  la frase

Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice quadrata.

### Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(y = z \cdot z).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y(x < y \wedge \exists z(y = z \cdot z)).$$

### Esercizio 5

Formalizzare la seguente frase:

Esiste una costante  $k$  ed infiniti numeri primi  $p$  tali che  $p+k$  è anch'esso primo.

utilizzando il linguaggio contenente soltanto i simboli  $\cdot, +, \leq$  e  $1$  (interpretati nella maniera usuale).

### Soluzione:

$$\exists k \forall m \exists p (m \leq p \wedge \psi(p) \wedge \psi(p+k))$$

dove  $\psi(x)$  è la formula

$$\forall z (\exists w z \cdot w = x \rightarrow (z = 1 \vee z = x))$$

che asserisce che  $x$  è un numero primo.

### Esercizio 6

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione

Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli  $\cdot$  e  $+$  (interpretati nella maniera usuale).

### Soluzione:

$$\forall x (\exists y (\exists z (y = z + z) \wedge x = y \cdot y \cdot y) \rightarrow \exists w (x = w + w))$$

oppure più semplicemente

$$\forall x (\exists z (x = z + z) \rightarrow \exists w (x \cdot x \cdot x = w + w))$$

### Esercizio 7

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione

Ogni numero maggiore di 1 è diviso da un numero primo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli  $\cdot$  e  $<$  (interpretati nella maniera usuale).

*Suggerimento.* Scrivere prima una  $L$ -formula  $P(w)$  che formalizzi “ $w$  è un numero primo” e una  $L$ -formula  $D(w, x)$  che formalizzi “ $w$  divide  $x$ ”.

**Soluzione:** Sia  $P(w)$  la formula

$$\forall y \forall z (w = y \cdot z \rightarrow w = y \vee w = z)$$

che asserisce che  $w$  è un numero primo, e sia  $D(w, x)$  la formula

$$\exists v (x = w \cdot v)$$

che asserisce che  $w$  divide  $x$ . Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall x (\exists y (y < x \wedge \forall z (y \cdot z = z)) \rightarrow \exists w (P(w) \wedge D(w, x))).$$

### Esercizio 8

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione

Ci sono numeri pari arbitrariamente grandi la cui metà è un quadrato perfetto.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli  $<$ ,  $\cdot$  e  $+$  (interpretati nella maniera usuale).

**Soluzione:**

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \exists z (y = z + z \wedge \exists w (z = w \cdot w)))$$

Varianti: “non è un quadrato perfetto” e/o nel linguaggio sostituire  $+$  con  $2$

### Esercizio 9

Formalizzare in  $\mathbb{R}$  la seguente affermazione

Il prodotto di un numero per il suo opposto è l'opposto del suo quadrato.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli  $\cdot$  e  $0$  (interpretati nella maniera usuale). Si ricordi che l'opposto di un numero reale è il numero stesso cambiato di segno.

*Suggerimento.* Scrivere prima una  $L$ -formula  $Z(x, y)$  che formalizzi “ $x$  è l'opposto di  $y$ ”, sfruttando il fatto che un numero e il suo opposto hanno lo stesso quadrato (attenzione: bisogna distinguere il caso in cui  $y$  sia il numero 0 dai restanti casi).

**Soluzione:** Sia  $Z(x, y)$  la formula

$$(y = 0 \wedge x = y) \vee (\neg(y = 0) \wedge \neg(x = y) \wedge x \cdot x = y \cdot y)$$

che asserisce che  $x$  è l'opposto di  $y$ . (Letteralmente: “ $y$  è il numero 0 e  $x = y$ , oppure  $y$  è diverso da 0 e  $x$  è un numero diverso da  $y$  che ha lo stesso quadrato”.) Allora l'affermazione del testo si può formalizzare come

$$\forall y \forall x (Z(x, y) \rightarrow Z(x \cdot y, y \cdot y)).$$

**Esercizio 10**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione

Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli  $\cdot$  e  $+$  (interpretati nella maniera usuale).

**Soluzione:**

$$\forall x (\exists y (\exists z (y = z + z) \wedge x = y \cdot y \cdot y) \rightarrow \exists w (x = w + w))$$

oppure più semplicemente

$$\forall x (\exists z (x = z + z) \rightarrow \exists w (x \cdot x \cdot x = w + w))$$

**Esercizio 11**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario  $<$ , ed il simbolo funzionale binario  $+$ :

Ogni numero pari sufficientemente grande è la somma di due numeri pari distinti.

**Soluzione:** Sia  $P(x) \equiv \exists y (x = y + y)$  la formalizzazione di “ $x$  è pari”. Allora la proposizione si formalizza come

$$\exists s \forall x ((P(x) \wedge s < x) \rightarrow \exists i \exists j (\neg(i = j) \wedge P(i) \wedge P(j) \wedge x = i + j)).$$

**Esercizio 12**

Formalizzare (in un universo il cui dominio è l'insieme degli esseri umani) in un linguaggio del prim'ordine con un simbolo relazionale  $G(x, y)$  per “ $x$  è genitore di  $y$ ” ed un simbolo predicativo unario  $B(x)$  per “ $x$  ha i baffi” il seguente enunciato:

C'è chi ha un cugino i cui nonni hanno tutti i baffi.

*Suggerimento.* Definire prima formule  $N[x, y]$  e  $C[x, y]$  per formalizzare le relazioni: “ $x$  è nonno di  $y$ ” e “ $x$  è cugino di  $y$ ”.

**Soluzione:** Ponendo  $N[x, y] \equiv \exists z (G(x, z) \wedge G(z, y))$  e  $C[x, y] \equiv \exists z \exists a \exists b G(z, a) \wedge G(z, b) \wedge a \neq b \wedge G(a, x) \wedge G(b, y)$ , per formalizzare le relazioni:  $x$  nonno di  $y$  e  $x$  cugino di  $y$ , abbiamo:

$$\exists p \exists c (C[c, p] \wedge \forall x (N[x, c] \rightarrow B(x)))$$

**Esercizio 13**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo  $\cdot$  per il prodotto tra numeri naturali:

Tutti i multipli di un multiplo di un numero, sono multipli di quel numero.

Si consiglia di definire prima una formula  $M(x, y)$  che formalizzi “ $x$  è multiplo di  $y$ ”.

**Soluzione:** Ponendo  $M(x, y) \equiv \exists z (x = z \cdot y)$  abbiamo:

$$\forall a (\forall x (\exists y (M(y, a) \wedge M(x, y)) \rightarrow M(x, a)))$$

**Esercizio 14**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo funzionale binario  $\cdot$  per il prodotto tra numeri naturali:

Tutti i divisori di un prodotto di due numeri naturali sono divisori di uno dei due.

**Soluzione:** Ponendo  $D(x, y) \equiv \exists z (y = z \cdot x)$  abbiamo:

$$\forall a \forall x \forall y (D(a, x \cdot y) \rightarrow D(a, x) \vee D(a, y))$$

**Esercizio 15**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario  $<$ , il simbolo funzionale binario  $/$  per la divisione, la costante 0 (tutti interpretati nella maniera usuale), e il simbolo predicativo unario  $N$ , dove  $N(x)$  è interpretato come “ $x$  è un numero naturale”:

Per ogni coppia di numeri naturali distinti c'è un numero razionale compreso strettamente tra essi.

**Soluzione:**

$$\forall x \forall y (N(x) \wedge N(y) \wedge (x < y) \rightarrow \exists p \exists q (N(p) \wedge N(q) \wedge \neg(q = 0) \wedge x < p/q \wedge p/q < y))$$

**Esercizio 16**

Formalizzare il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario  $A$ , dove  $A(x, y)$  è interpretato come “ $x$  è antenato di  $y$ ” e l'universo di discorso si intende costituito da tutte le persone:

Ci sono figli unici.

**Soluzione:** Sia  $G(x, y) \equiv \neg(x = y) \wedge \forall z (A(x, z) \wedge A(z, y) \rightarrow x = z \vee y = z)$ . Allora la proposizione si formalizza come

$$\exists p \exists q (\exists r (G(r, p) \wedge G(r, q) \wedge \neg(p = q))).$$

### Esercizio 17

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  con il linguaggio contenente i simboli  $<$ ,  $\times$  e  $1$  la seguente proposizione (falsa):

Tutti i numeri sufficientemente grandi ammettono almeno due divisori primi.

Definire prima, mediante opportune formule da usare come abbreviazioni, la relazione di divisibilità e la proprietà di essere un numero primo.

**Soluzione:**

### Esercizio 18

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli  $<$ ,  $\times$ ,  $+$  e  $1$ :

Ci sono infiniti numeri  $n$  tali che  $3n^2 + 1$  è un quadrato perfetto

**Soluzione:**  $\forall k \exists n (k < n \wedge \exists m (m \times m = (1 + 1 + 1) \times n \times n + 1))$

### Esercizio 19

Formalizzare in  $\mathbb{R}$  il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli  $1$ ,  $+$  e  $\cdot$ :

Se  $n$  e  $m$  sono coprimi (cioè relativamente primi), allora  $n \cdot a + m \cdot b = 1$  per qualche  $a$  e  $b$ .

**Soluzione:**  $\forall n, m [\forall x (\exists y (x \cdot y = n) \wedge \exists z (x \cdot z = m) \rightarrow x = 1) \rightarrow \exists a, b (n \cdot a + m \cdot b = 1)]$ .

### Esercizio 20

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente frase

Se ci sono elementi arbitrariamente piccoli che godono della proprietà  $P$ , allora la funzione  $f$  è suriettiva

utilizzando il linguaggio contenente i simboli:  $P$ ,  $<$  e  $f$ .

**Soluzione:**

$$\forall x \exists y (y < x \wedge P(y)) \rightarrow \forall y \exists x (f(x) = y)$$

**Esercizio 21**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione in un linguaggio contenente un simbolo di predicato unario  $P$  che descrive la proprietà di essere un numero primo, il simbolo  $<$  di relazione binaria per l'ordinamento, il simbolo di funzione binaria  $+$  per la somma, e la costante 1:

Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre numeri primi, non necessariamente distinti

**Soluzione:**

$$\exists x \forall y (x < y \wedge \exists w (w + w + 1 = y) \rightarrow \exists z_1, z_2, z_3 (P(z_1) \wedge P(z_2) \wedge P(z_3) \wedge y = z_1 + z_2 + z_3))$$

**Esercizio 22**

Sia  $L$  un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario  $P$ . Sia  $\mathcal{A}$  la  $L$ -struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone,  $a P^{\mathcal{A}} b$  se e solo se  $a$  è genitore di  $b$ . Formalizzare in  $\mathcal{A}$  la seguente affermazione:

Tutti i cugini dei fratelli di una persona sono anche cugini di quella persona.

**Soluzione:** Sia  $C(x, y) = \exists n \exists a \exists b (a \neq b \wedge P(n, a) \wedge P(n, b) \wedge P(a, x) \wedge P(b, y))$  una abbreviazione della formalizzazione di “ $x$  è cugino di  $y$ ”. Allora

$$\forall p \forall b ((b \neq p \wedge \exists x (P(x, p) \wedge P(x, b))) \rightarrow \forall c (C(c, b) \rightarrow C(c, p)))$$

**Esercizio 23**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  la seguente affermazione:

Se  $a$  e  $b$  sono relativamente primi, allora ci sono infiniti numeri primi congruenti ad  $a$  modulo  $b$

usando i simboli  $1, <, +$  e  $\cdot$ .

*Suggerimento.* Cominciare a formalizzare il predicato di divisibilità  $|$  e il predicato di primalità  $\text{Pr}$ .

**Soluzione:**  $x | y$  se e solo se  $\exists z (z \cdot x = y)$   
 $\text{Pr}(x)$  è formalizzato come  $\forall y (y | x \rightarrow y = x \vee y = 1)$

$$\forall a \forall b (\forall x (x | a \wedge x | b \rightarrow x = 1) \rightarrow \forall x \exists y (x < y \wedge \text{Pr}(y) \wedge \exists v (v \cdot a + b = y)))$$

**Esercizio 24**

Sia  $L$  in un linguaggio del prim'ordine in cui ci sono costanti individuali  $g$  per Giuseppe,  $m$  per Maria e i simboli relazionali binari  $S, F$ , dove  $S(x, y)$  significa che  $x$  ha sposato  $y$  e  $F(x, y)$  significa che  $y$  è figlio di  $x$ . Sia  $\mathcal{A}$  la  $L$ -struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone. Formalizzare in  $\mathcal{A}$  la seguente frase:

Uno dei cugini di Giuseppe ha sposato una nipote di Maria

**Soluzione:** La formula che formalizza l'asserzione “ $x$  è cugino di  $z$ ” è

$$\exists u, v, w [F(u, z) \wedge F(v, u) \wedge F(v, w) \wedge F(w, x) \wedge u \neq w \wedge x \neq z] \quad (\varphi_C(x, z))$$

mentre la frase “ $y$  è nipote di  $z$ ” può essere intesa in due modi:

1.  $z$  è il nonno (o la nonna) di  $y$ , oppure
2.  $z$  è lo zio (o la zia) di  $y$

e quindi otteniamo due possibili formalizzazioni:

$$\begin{aligned} \exists u [F(u, y) \wedge F(z, u)] & \quad (\varphi_{N_1}(y, z)) \\ \exists u, v [F(u, z) \wedge F(v, u) \wedge F(v, y) \wedge v \neq z] & \quad (\varphi_{N_2}(y, z)) \end{aligned}$$

quindi la formalizzazione della frase è

$$\exists x, y (\varphi_C(x, g) \wedge \varphi_N(y, m) \wedge S(x, y))$$

dove  $\varphi_N$  è  $\varphi_{N_1}$  oppure  $\varphi_{N_2}$ . Nel caso 1 (nipote di zio) possiamo riscrivere la formula così

$$\begin{aligned} \exists x, y, u, v, v', z (F(u, y) \wedge F(m, u) \\ \wedge F(v, x) \wedge F(z, v) \wedge F(z, v') \wedge F(v', g) \wedge \neg(v = v') \wedge \neg(x = g) \\ \wedge S(x, y)) \end{aligned}$$

Nel caso 2 (nipote di nonno) possiamo riscrivere la formula così

$$\begin{aligned} \exists x, y, u, w, v, v', z (F(u, y) \wedge F(w, u) \wedge F(w, m) \wedge \neg(m = u) \\ \wedge F(v, x) \wedge F(z, v) \wedge F(z, v') \wedge F(v', g) \wedge \neg(v = v') \wedge \neg(x = g) \\ \wedge S(x, y)) \end{aligned}$$

### **Esercizio 25**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  l'affermazione

*Ogni numero pari maggiore di 2 è il prodotto di due numeri pari distinti.*

utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $<$ ,  $\cdot$  e  $2$  (tutti interpretati nella maniera usuale).

*Suggerimento:* Scrivere prima una formula  $\varphi(x)$  che formalizzi “ $x$  è pari”.

**Soluzione:** Una formula  $\varphi(x)$  che formalizza “ $x$  è pari” è  $\exists u (2 \cdot u = x)$ . Una possibile formalizzazione dell'affermazione richiesta è:

$$\forall x [( \varphi(x) \wedge 2 < x ) \rightarrow \exists w \exists z ( z \neq w \wedge \varphi(w) \wedge \varphi(z) \wedge w \cdot z = x )].$$

**Esercizio 26**

Formalizzare in  $\mathbb{N}$  l'affermazione

*Esistono infiniti numeri primi.*

utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $<$ ,  $\cdot$  e  $1$  (tutti interpretati nella maniera usuale).

*Suggerimento:* Scrivere prima una formula  $\varphi(x)$  che formalizzi “ $x$  è un numero primo”.

**Soluzione:** Una formula  $\varphi(x)$  che formalizza “ $x$  è un numero primo” è

$$(1 < x) \wedge \forall u \forall w ((u \cdot w = x) \rightarrow (u = x \vee w = x)).$$

Una possibile formalizzazione dell'affermazione richiesta è:

$$\forall y \exists x [(y < x) \wedge \varphi(x)].$$

**Esercizio 27**

1.

Formalizzare in  $\mathbb{R}$  la frase

Il numero  $y$  è la radice cubica di qualche numero.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo  $\cdot$  interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $<$ ,  $\cdot$  interpretati nella maniera usuale, formalizzare in  $\mathbb{R}$  la frase

Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice cubica.

**Soluzione:**

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z (y \cdot y \cdot y = z).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \exists z (z \cdot z \cdot z = y)).$$

**Esercizio 28**

1.

Formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la frase

Il numero  $y$  ammette una radice quadrata.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo  $\cdot$  di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $>$ ,  $\cdot$  interpretati nella maniera usuale, formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la frase

Ci sono numeri arbitrariamente grandi che sono il quadrato di qualche numero.

**Soluzione:**

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(z \cdot z = y).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x \exists y (y > x \wedge \exists z (z \cdot z = y)).$$

**Esercizio 29**

1.

Formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la frase

Il numero  $y$  è diviso dal numero  $x$ .

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo  $\cdot$  di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli  $0, \cdot$  interpretati nella maniera usuale, formalizzare in  $\mathbb{Z}$  la frase

Se un numero è non nullo, non può essere diviso da 0.

**Soluzione:**

1. Una possibile formalizzazione è

$$\exists z(z \cdot x = y).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall y(\neg(y = 0) \rightarrow \neg \exists z(z \cdot 0 = y)).$$