Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Siamo P e Q formule proposizionali arbitrarie. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ Se P è soddisfacibile e P $\models$ Q allora anche Q deve essere soddisfacibile.
□ Se Q è soddisfacibile e P $\models$ Q allora anche P deve essere soddisfacibile.
□ Se P e Q sono soddisfacibili allora anche P $\land$ Q lo è certamente.
■ P $\lor$ (P $\to$ Q) è una tautologia.

(b) Si considerino gli insiemi $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(f(n) = f(4))\}$ e $C = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(f(n) \neq 4)\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

□ Tutti e tre gli insiemi sono numerabili.
■ $|A| = |B|$
□ $|B| = |C|$
■ $|A| < |C|$

(c) La relazione binaria "essere cugini" è 2 punti

□ riflessiva.
■ simmetrica.
□ transitiva.
□ una relazione di equivalenza.

(d) Sia φ la formula $\exists x\, R(x, a) \land (P(x) \to \forall y R(x, y))$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ Vi sono variabili che occorrono sia libere che vincolate in φ.
■ $FV(\varphi) = \{x\}$
■ Ogni variabile che occorre in φ ha almeno un'occorrenza vincolata.
□ La formula φ è un enunciato.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1 &: \quad (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee \mathrm{D} \\ \mathrm{P}_2 &: \quad \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B} \\ \mathrm{P}_3 &: \quad (\mathrm{A} \wedge \mathrm{D}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}). \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \models \mathrm{P}_3$
- $\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$
- $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3 \models \mathrm{P}_1$.

Soluzione: Innanzi tutto calcoliamo la tavola di verità:

A	B	C	D	P_1	P_2	P_3
F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \not\models \mathrm{P}_3$, come testimoniato dalla seconda riga in cui $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sono false e D è vera.

$\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_1 \not\models \mathrm{P}_2$, come testimoniato dalla decima riga in cui A, D sono vere e B, C sono false.

$\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3 \models \mathrm{P}_1$, come testimoniato dalle ultime tre righe.

Esercizio 3 6 punti

Formalizzare in $\mathbb{N}$ le frasi seguenti nel linguaggio avente come simboli 1, $<$, $+$ e $|$, tutti interpretati nella maniera usuale:

1. x è primo.
2. Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi.

Soluzione: (i) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi(x)$ seguente:

$$1 < x \land \forall y \, (y \mid x \to y = 1 \lor y = x).$$

(ii) Una possibile formalizzazione è

$$\exists y \forall z \, [y < z \land \neg \exists w \, (w + w = z) \to \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \, (\varphi(x_1) \land \varphi(x_2) \land \varphi(x_3) \land z = x_1 + x_2 + x_3)].$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{f, g\}$ con f e g simboli di funzione binari e si consideri la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \cdot, + \rangle$. Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ le formule

$$\forall y \forall z \, (f(y, z) = x \to y = x \lor z = x) \qquad \text{e} \qquad \exists y \, (\neg(y = x) \land g(y, y) = x).$$

1. Si determini $\varphi(\mathcal{A})$.
2. Si determini $\psi(\mathcal{A})$.
3. L'enunciato $\exists x \, (\varphi(x) \land \psi(x))$ è soddisfacibile?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{A} \models \varphi[x/n]$ se e solo se n non è un numero composto (ovvero non è il prodotto di due numeri entrambi diversi da esso). Quindi

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{0, 1\} \cup \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è un numero primo}\}.$$

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{A} \models \psi[x/n]$ se e solo se n è un numero pari diverso da 0, ovvero

$$\psi(\mathcal{A}) = \{2k \mid 0 \neq k \in \mathbb{N}\}.$$

3. L'enunciato proposto è soddisfacibile, come testimoniato da $\mathcal{A}$ stessa. Infatti si ha che $\mathcal{A} \models \exists x \, (\varphi(x) \land \psi(x))$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, simultaneamente, $\mathcal{A} \models \varphi[x/n]$ e $\mathcal{A} \models \psi[x/n]$ (equivalentemente: se e solo se $\varphi(\mathcal{A}) \cap \psi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$). Poiché 2 è sia un numero primo che un numero pari diverso da 0, si ha che l'enunciato è soddisfatto in $\mathcal{A}$.

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \frac{3n^2+n}{2}.$$

Soluzione:

Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base $(n=1)$**.** $\sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{(3 \cdot 1^2+1)}{2}$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \frac{3n^2+n}{2}$

Tesi induttiva: $\sum_{i=1}^{n+1}(3i-1) = \frac{3(n+1)^2+(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(3i-1)\right) + (3(n+1)-1) \\
&= \frac{3n^2+n}{2} + 3n + 2 && \text{(Ip. ind.)} \\
&= \frac{3n^2+n+6n+4}{2} \\
&= \frac{3n^2+7n+4}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{3(n+1)^2+(n+1)}{2} = \frac{3(n^2+2n+1)+n+1}{2} = \frac{3n^2+7n+4}{2}.$$