Logica Matematica
5.2 – Termini

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Termini

L'insieme dei termini è definito dalle seguenti clausole:

- una variabile è un termine;
- un simbolo di costante è un termine;
- un'espressione del tipo $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine, dove f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1, \dots, t_n$ sono termini.

Quel che si intende è che ogni stringa finita di simboli ottenuta applicando (un numero finito di volte) queste clausole è un termine. Formalmente, bisogna dare la seguente definizione ricorsiva.

Termini

Dato un linguaggio $L = \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Rel}$, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big(\{ (,) \} \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func} \Big)^*$$

di tutte le stringhe di parentesi, variabili, simboli di costante e di variabile, e definiamo per ricorsione gli insiemi Term_n (per $n \in \mathbb{N}$) come segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Term}_0 &= \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}, \\ \mathrm{Term}_{n+1} &= \mathrm{Term}_n \cup \\ &\qquad \{ f(t_1 \dots t_k) \mid f \in \mathrm{Func} \text{ e } t_1, \dots, t_k \in \mathrm{Term}_n \text{ e } k = \mathrm{ar}(f) \}. \end{aligned}$$

L'insieme dei **termini** del linguaggio L (o, più brevemente, L-**termini**) è

$$\mathrm{Term} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Term}_n .$$

Se t è un termine, il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $t \in \mathrm{Term}_n$ si chiama **altezza** di t e si indica con $\mathrm{ht}(t)$.

Esempi

Sia $L = \{f, g, c\}$ un linguaggio del prim'ordine con f simbolo di funzione binario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante. Ciascuna delle seguenti stringhe è un L-termine:

$$x \qquad y \qquad c \qquad v_0 \qquad \dots$$

$$g(x) \qquad f(c, v_0) \qquad f(c, c) \qquad g(c) \qquad \dots$$

$$g(f(c, v_0)) \qquad f(x, g(x)) \qquad f(g(x), g(x)) \qquad g(g(x)) \qquad \dots$$

e così via. I termini nella prima riga hanno altezza 0, quelli nella seconda hanno altezza 1, quelli nella terza hanno altezza 2 e così via.

Attenzione! Le virgole non sono necessarie, e in effetti non fanno parte della lista di simboli da utilizzare. Tuttavia il loro utilizzo è comodo per favorire la suddivisione tra i vari termini a cui si sta "applicando" il simbolo di funzione, qualora questo abbia arietà > 1.

Albero sintattico

Anche i termini possono essere analizzati mediante **alberi sintattici**, che in questo caso saranno alberi etichettati finiti, ma non necessariamente binari: il numero dei successori di un nodo dipenderà dall'arietà dei simboli di funzione utilizzati.

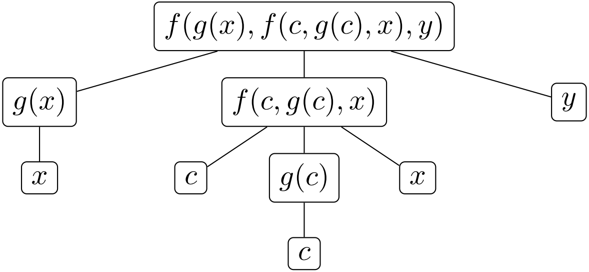
Algoritmo di costruzione dell'albero sintattico di un termine

- La radice viene etichettata con il termine dato.
- Se un nodo è etichettato con una costante o una variabile, non si aggiunge nessun successore e il nodo diventerà una foglia dell'albero.
- Se un nodo è etichettato con un termine della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$ dove $\mathrm{ar}(f) = n$, allora si aggiungono n successori al nodo etichettandoli con $t_1, \ldots, t_n$, rispettivamente.

Come nel caso delle proposizioni, se un nodo contiene una stringa che non è delle forme precedenti, l'algoritmo termina immediatamente e possiamo concludere che la stringa iniziale non era un termine ben formato.

Esempio

Sia $L = \{f, g.c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante. L'albero sintattico del termine $f(g(x), f(c, g(c), x), y)$ è



Supponiamo che t sia un termine della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$: come si individuano i termini $t_1, \ldots, t_n$?

Si scorre la stringa di simboli racchiusa dalle parentesi più esterne, ovvero tra la parentesi sinistra che segue f e la sua parentesi destra di chiusura.

- Se il primo simbolo che si incontra è una variabile o una costante, allora si tratta già del termine t_1.
- Se il primo simbolo è un simbolo di funzione, ad esempio h, allora deve essere seguito da una parentesi sinistra: si cerca la parentesi destra che la chiude (utilizzando il contatore di parentesi) e si ottiene che t_1 è il termine che va da h fino a tale parentesi di chiusura.
- Individuato t_1, si procede scorrendo quel che rimane della lista per individuare t_2, poi t_3, e così via fino a t_n.

L'algoritmo termina quando sono stati individuati tutti i termini $t_1, \ldots, t_n$, dove n è l'arietà di f. Come sempre si intende che se un passo dell'algoritmo non si può eseguire, oppure se restano ancora elementi nella stringa dopo aver individuato $t_1, \ldots, t_n$ allora l'algoritmo termina immediatamente e la stringa analizzata non era un termine.

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Esempio

Sia $L = \{f, g, c\}$ con f simbolo di funzione ternario, g simbolo di funzione unario e c simbolo di costante, e sia t il termine della forma $f(t_1, t_2, t_3)$ dato da

$$f(g(g(x))cf(g(z)xg(c)))$$

Analogamente, si può vedere che il termine $f(g(z)xg(c))$ è a sua volta della forma $f(s_1, s_2, s_3)$ dove s_1 è $g(z)$, s_2 è x e s_3 è $g(c)$.

Reintroducendo le virgole di separazione, t è dunque il termine

$$f(g(g(x)), c, f(g(z), x, g(c)))$$

Osservazione

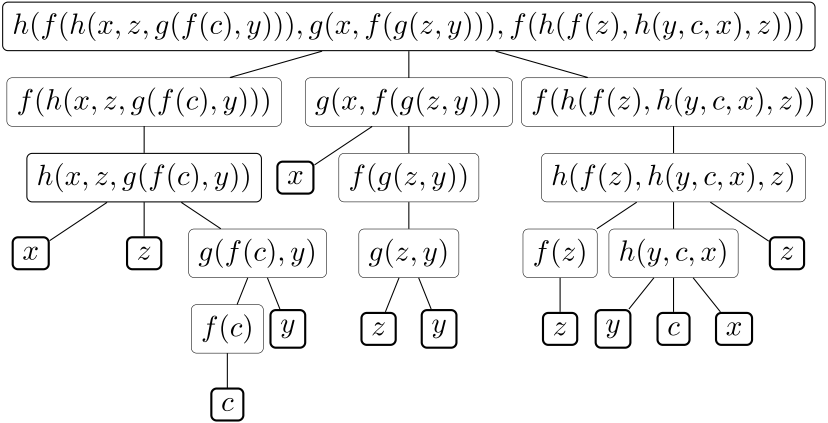
Questo mostra anche che si può fare a meno di utilizzare le virgole per separare i termini. Tuttavia noi continueremo ad utilizzarle perché spesso aiutano la lettura del termine stesso.

Esempio

L'albero sintattico del termine

$$h(f(h(x,z,g(f(c),y))),g(x,f(g(z,y))),f(h(f(z),h(y,c,x),z)))$$

dove c è un simbolo di costante e f, g e h sono simboli di funzione di arietà 1, 2 e 3, è

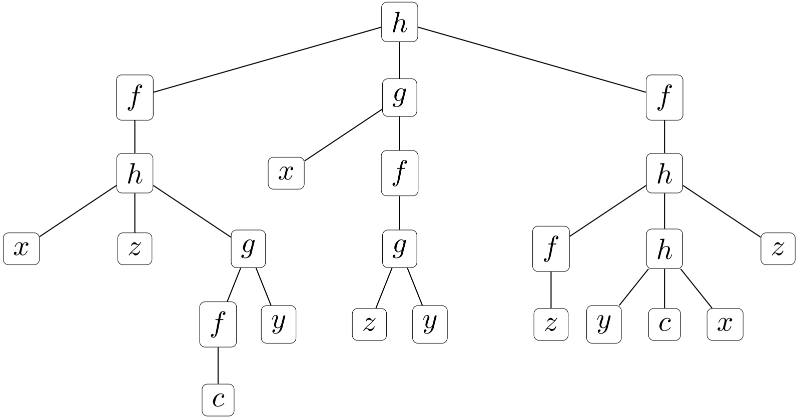


Esempio

L'albero sintattico del termine

$$h(f(h(x,z,g(f(c),y))),g(x,f(g(z,y))),f(h(f(z),h(y,c,x),z)))$$

dove c è un simbolo di costante e f, g e h sono simboli di funzione di arietà 1, 2 e 3, è



Misure di complessità

Abbiamo due misure naturali di complessità per un termine t:

- $\mathrm{lh}(t)$, la **lunghezza** (incluse le parentesi) della stringa t e
- $\mathrm{ht}(t)$, l'**altezza** di t: quest'ultima coincide con l'altezza dell'albero sintattico di t diminuita di 1.

Quindi se t è il termine visto nella slide precedente

$$h(f(h(x,z,g(f(c),y))),g(x,f(g(z,y))),f(h(f(z),h(y,c,x),z)))$$

allora $\mathrm{lh}(t) = 48$ e $\mathrm{ht}(t) = 5$.

Esercizio

Siano f, g, h simboli di funzione con $\mathrm{ar}(f) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = 2$ e $\mathrm{ar}(h) = 3$, e a, b, c simboli di costante. Per ciascuno delle seguenti stringhe determinare se sono termini provando a costruirne l'albero sintattico. Nel caso siano termini determinarne l'altezza.

- $f(g(a, c))$
- $h(f(x), g(f(a), y), z)$
- $h(a, b, x)$
- $g(h(x, x, x), f(x, x))$
- $f(f(f(g(g(a, c), g(x, y)))))$
- $h(f(a), g(f(a), a))$

Termini e polinomi

Consideriamo il linguaggio $L = \{+, \cdot, 1\}$ dove $+$ e $\cdot$ sono simboli di funzione binari e 1 è un simbolo di costante. I termini di questo linguaggio sono del tipo

$$x \qquad y \qquad 1 \qquad z \qquad \dots$$

$$+(x, 1) \qquad \cdot(x, x) \qquad \dots$$

$$+(\cdot(x, x), 1) \qquad \cdot(+(1, 1), \cdot(x, x)) \qquad \dots$$

Consideriamo ora il termine t

$$+(+(\cdot(x, x), \cdot(+(1, 1), x)), 1).$$

Utilizzando la notazione infissa (ovvero scrivendo $t + s$ anziché $+(t, s)$ e $t \cdot s$ anziché $\cdot(t, s)$) il termine t diventa

$$(((x \cdot x) + ((1 + 1) \cdot x)) + 1),$$

da cui omettendo le parentesi e utilizzando le solite convenzioni per la notazione sull'addizione e moltiplicazione si ottiene

$$x^2 + 2x + 1.$$

In altre parole, il termine t "rappresenta" il polinomio $x^2 + 2x + 1$, una volta che i simboli $+, \cdot, 1$ vengano interpretati nella maniera usuale!

Più in generale, si può osservare che i termini in questo linguaggio L corrispondono esattamente ai polinomi a coefficienti interi non negativi (ovvero in cui tutti i coefficienti sono numeri naturali).

Esercizio

Consideriamo nuovamente il linguaggio $L = \{+, \cdot, 1\}$ dove $+$ e $\cdot$ sono simboli di funzione binari e 1 è un simbolo di costante.

A quali polinomi corrispondono i seguenti termini?

- $+(+(+(x, x), y), \cdot(z, z))$
- $+(+(\cdot(x, \cdot(x, x)), +(x, x)), +(+(1, 1), 1))$
- $+(+(\cdot(+(1, 1), x), x), +(1, 1))$

Scrivere termini del linguaggio L che rappresentino i seguenti polinomi:

- $x + y + 3$
- $x + y^2 + 3z$
- $z^2 + 2x$