Esercizio Definizioni Matematiche

Francesco Mecca

May 22, 2020

1 Insiemi

1.1 Numeri naturali

I numeri naturali sono i numeri appartenenti all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ovvero tutti i numeri maggiori o uguali a 0.

Possiamo definire i numeri naturali utilizzando la rappresenzationa di Von Neumann:

- definifiamo la funzione *successore(n)* come:

$$\text{successore(n)} = \text{n} \cup \{\text{n}\}$$

- $0 = \varnothing$
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$
- $\text{n} = \text{n-1} \cup \{\text{n-1}\} = \{0, 1, 2, \ldots, \text{n-1}\}$

1.2 Numeri interi

I numeri interi sono i numeri appartenenti all'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, ovvero tutti i numeri il cui valore assoluto è un numero naturale.

Possiamo rappresentare intuitivamente l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ come $\{n \mid \exists(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, n = a\text{-}b\}$

1.3 Numeri razionali

I numeri razionali sono i numeri appartenenti all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Z}$, ovvero tutti i numeri rappresentabili tramite un numero razionale o come il limite di una sequenza di numeri razionali che non si ripete e non termina (numeri irrazionali).

1.4 Intersezione

L'intersezione fra due insiemi è a sua volta un insieme contenente gli elementi in comune fra i due insiemi:

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$$

1.5 Unione

L'unione fra due insiemi è a sua volta un insieme contenente gli elementi dei due insiemi:

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$

1.6 Differenza

La differenza fra due insiemi è a sua volta un insieme contenente tutti gli elementi presenti nell'insieme a sinistra della differenza ma non non contenuti nell'insieme a destra:

$$A \setminus B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

1.7 Insieme Potenza

L'insieme potenza di un insieme S, $\wp(S)$, anche detto power set di S è l'insieme che contiene tutti i sottoinsiemi di S.

1.8 Complemento di un insieme

Il complemento di un insieme è a sua volta un insieme che contiene tutti gli elementi che non appartengono all'insieme di partenza:

$$\mathrm{A}^c = \{\mathrm{a} \mid \mathrm{a} \notin \mathrm{A}\}$$

1.9 Insieme contenuto

Un insieme A si dice contenuto in B se tutti gli elementi di A sono a loro volta elementi di B:

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \text{ iff } \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{a} \in \mathrm{B}$$

1.10 Insieme strettamente contenuto

Un insieme A si dice strettamente contenuto in B se tutti gli elementi di A sono a loro volta elementi di B ma ci sono degli elementi di B che non appartengono ad A:

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ iff } (\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{a} \in \mathrm{B}) \wedge (\exists \mathrm{b} \in \mathrm{B} \mid \mathrm{b} \notin \mathrm{A})$$

1.11 Prodotto Cartesiano

Il prodotto cartesiano di due insiemi è un insieme contenente tutte le coppie ordinate di cui il primo elemento appartiene al primo insieme ed il secondo elemento al secondo insieme:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$$

1.12 Arietà n

Si definisce arietà di una relazione R il numero di insiemi a cui si applica quella relazione. Se una relazione ha arietà n:

$$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$$

1.13 Relazione binaria

Si definisce una relazione R binaria quando R ha arietà 2:

$$R \subseteq A_1 \times A_2$$

1.14 Proprietà riflessiva

Considerato un insieme A e una relazione R, diciamo che R è una relazione riflessiva se:

$$\forall a \in A,\ aRa$$

1.15 Proprietà simmetrica

Considerato un insieme A e una relazione binaria R, diciamo che R è una relazione simmetrica se:

$$\forall a,b \in A,\ aRb \Leftrightarrow bRa$$

1.16 Proprietà transitiva

Considerato un insieme A e una relazione binaria R, diciamo che R è una relazione transitiva se:

$$\forall a,b,c \in A,\ aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$$

1.17 Relazione di equivalenza

Una relazione binaria che è allo stesso tempo riflessiva, simmetrica e transitiva si dice relazione d'equivalenza.

1.18 Chiusura transitiva

Considerato un insieme A e una relazione binaria R, definiamo chiusura transitiva la più piccola relazione transitiva R^+ sull'insieme A che contiene R:

$$R \subseteq R^+ \wedge (\forall T, R \subseteq T \rightarrow R^+ \subseteq T \text{ (}R^+\text{ is minimal))}$$

Se la relazione R è transitiva, allora $R = R^+$

1.19 Funzione

Definiamo funzione una relazione fra due insiemi A e B che associa un elemento dell'insieme A ad esattamente un elemento dell'insieme B:

$$f\colon X \mapsto Y$$

1.20 Funzione di arietà n

Possiamo definire una funzione di arietà n su un insieme S come:

$$f\colon S^n \mapsto S$$

1.21 Funzione iniettiva

Una funzione $f\colon X \mapsto Y$ si dice iniettiva quando presi due elementi dell'insieme X, se la loro immagine è uguale (f(x)), allora i due elementi sono uguali:

$$\forall x, x' \in X,\ f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$$

1.22 Funzione suriettiva

Una funzione $f\colon X \mapsto Y$ si dice suriettiva quando preso qualunque elemento di Y, questo ha una controimmagine x in X:

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \quad f(x) = y$$

1.23 Funzione biettiva

Chiamiamo una funzione biettiva quando è allo stesso tempo iniettiva e suriettiva.

2 Linguaggi

2.1 Alfabeto

Un alfabeto è un insieme i cui membri sono simboli (che includono lettere, caratteri e numeri). Se L è un linguaggio formale, ossia un set finito o infinito di stringhe di finita lunghezza, allora l'alfabeto di L, indicato con Σ, è l'insieme di tutti i simboli che possono comparire in una qualunque stringa di L.

2.2 Stringa

Una stringa è una sequenza finita di simboli di un alfabeto.

2.3 Lettera

Una lettera di una string è un simbolo dell'alfabeto.

2.4 Stringa vuota

Una stringa vuota è una stringa di lunghezza zero, anche detta ε.

2.5 Concatenazione

La concatenazione di stringhe è l'operazione di unione dei caratteri di due stringhe preservando il loro ordine.

2.6 Ripetizione

Si dice ripetizione l'operazione di concatenazione di una stringa con n copie di sé stessa.

2.7 Prefisso

Si dice prefisso di una stringa la sottostringa che appare all'inizio della stringa.

2.8 Suffisso

Si dice suffisso di una stringa la sottostringa che appare alla fine della stringa.

3 Grafi

Un grafo è una coppia ordinata G = (V,E) che comprende un insieme V di vertici e un insieme E di coppie (e,v).

3.1 Grafo diretto

Un grafo diretto è un grafo in cui gli archi hanno orientamento.

3.2 Grafo indiretto

Un grafo indiretto o semplice è un grafo in cui gli archi non hanno orientamento, ovvero:

$$\forall x,y \in V,\ (x,y) = (y,x)$$

3.3 Grafo bipartito

Un grafo si dice bipartito quando l'insieme di vertici V può essere diviso in due insiemi disgiunti e indipendenti W e X, di modo che ogni arco connetta un vertice in W con un vertice in X e si scrive G = (W,X,E):

$$V = W \cup X \land W \cap X = \varnothing$$

3.4 Nodo sorgente

Un nodo si dice sorgente quando il numero di archi in ingresso è 0.

3.5 Nodo destinazione

Un nodo si dice destinazione quando il numero di archi in uscita è 0.

3.6 Funzione di etichettatura per archi e nodi

In un generico grafo G, è possibile definire funzioni di etichettatura o di colorazione dei nodi come, dato un insieme di etichette S:

f: V$\mapsto$S Definendo un insieme di

3.7 Cammino

Si dice cammino una sequenza di archi che collega una sequenza di vertici distinti.

3.8 Ciclo

Si definisce ciclo un cammino in cui il primo e l'ultimo vertice coincidono mentre tutti gli altri vertici si ripetono al più una volta.

3.9 Lunghezza del cammino

Si definisce lunghezza il numero di archi che compongono un cammino. In un grafo pesato la lunghezza di un cammino è costituita dalla somma del peso di ogni arco che lo compone. Un cammino in un grafo è una sequenza finita o infinita di archi che collegano una sequenza di vertici distinti l'uno dall'altro. Un cammino di lunghezza k è rappresentato da una sequenza alternata di k vertici ed archi.\ $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$

3.10 Grafi fortemente connesso

Un grafo diretto si dice fortemente connesso se ogni vertice è raggiungibile da ogni altro vertice.

3.11 Componenti fortemente connesse

Si dicono componenti fortemente connesse le partizioni di un grafo diretto che sono fortemente connesse.

3.12 BSCC - Bottom Strongly Connected Component

Una componente fortemente connessa si dice BSCC quando nessun vertice al di fuori della BSCC è raggiungibile.

3.13 Albero

Si dice albero un grafo indiretto in cui ogni coppia di vertici è connessa da solo un arco. Ogni grafo indiretto, connesso e aciclico è un albero.

3.14 In e out degree di un nodo

Si dice in degree, *indeg*$^-$*(v)*, di un nodo il numero di archi entranti in quel nodo. Si dice out degree, *outdeg*$^+$*(v)*, di un nodo il numero di archi uscenti da quel nodo.

4 Matrice

Una matrice è un vettore bidimensionale di numeri o altri oggetti. La dimensione n×m è data dal numero di righe n e il numero di colonne m.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & p_{n,m} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$$

4.1 Somma

La somma A+B di due matrici A, B è definito come:

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})_{\mathrm{ij}} = \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}+\mathrm{B}_{\mathrm{ij}}$$

4.2 Prodotto

Definiamo il prodotto scalare di una matrice A per un fattore c come:

$$(\mathrm{cA}_{\mathrm{ij}}) = \mathrm{c}\cdot\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$$

Definiamo il prodotto fra una matrice A di dimensione $|\mathrm{n}_a \times \mathrm{m}_a|$ e una matrice B di dimensione $|\mathrm{n}_\mathrm{b} \times \mathrm{m}_\mathrm{b}|$ quando $\mathrm{m}_a = \mathrm{n}_\mathrm{b}$ come:

$$\mathrm{AB}_\mathrm{ij} = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{ir}\mathrm{b}_\mathrm{rj}$$

Dato un vettore $\vec{v}$ possiamo calcolare il prodotto di vettore per matrice considerando il vettore una matrice colonna e applicando lo stessa definizione del prodotto fra matrici (quindi la lunghezza di $\vec{x}$ dovrà essere pari al numero di colonne della matrice).