Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 7 Aprile 2013

COGNOME E NOME

Esercizio 1. Sia C l'insieme di tutte le funzioni $f : \omega \to \omega$ a supporto finito, dove il supporto di f è l'insieme degli $x \in \omega$ tali che $f(x) \neq 0$. Date due funzioni distinte $f, g \in C$, definiamo $f < g$ se, considerato il massimo n tale che $f(n) \neq g(n)$, si ha $f(n) < g(n)$.

1. Si trovino, se esistono, i primi tre elementi di $(C, \leq)$ in ordine crescente.
2. Si trovi, se esiste, la più piccola funzione f, diversa dal minimo di C, che non ha un predecessore immediato nell'ordine dato.
3. Si dimostri che $(C, \leq)$ è un buon ordine.
4. Si determini se il tipo d'ordine di $(C, \leq)$ è maggiore o minore o uguale al tipo d'ordine di $\omega \times \omega$ con l'ordine lessicografico definito come segue: $(n, m) < (n', m')$ se $m < m'$ o $m = m'$ e $n < n'$. A tal fine si trovi un isomorfismo da $\omega \times \omega$ ad un segmento iniziale di $(C, \leq)$ o viceversa.
5. Si determini la cardinalità di C.
6. Si determini il tipo d'ordine del sottoinsieme di C costituito dalle funzioni senza predecessore immediato.

Dimostrazione. I primi elementi di C sono le funzioni $f_0 < f_1 < f_2 \dots$ dove $f_n : \omega \to \omega$ è la funzione che manda 0 in n e tutti gli altri elementi in 0.

La prima funzione che non ha predecessore immediato è la funzione f_ω che manda 1 in 1, e tutti gli altri elementi in 0.

Dando per buono il fatto che $(C, \leq)$ sia un ordine totale, possiamo immergere $\omega \times \omega$ in un segmento di C mandando (a, b) nella successione $(a, b, 0, 0, \dots)$, vista come funzione da ω ad ω.

La cardinalità di C è numerabile. Per dimostrarlo scriviamo $C = \bigcup_{k \in \omega} M_k$ dove M_k è l'insieme delle funzioni tali che $f(x) = 0$ per ogni $x \geq k$. Ciascun M_k è numerabile in quanto è un prodotto cartesiano di k insiemi numerabili. Quindi anche C lo è in quanto unione numerabile di insiemi numerabili.

Dimostriamo ora che $(C, \leq)$ è un buon ordine. Siccome gli M_k sono segmenti iniziali di C, basta mostrare che ciascun M_k è un buon ordine. Si fa per induzione su k osservando che M_{k+1} è isomorfo a $M_k \times \omega$ con l'ordine lessicografico: ad una funzione f che vale zero per tutti gli $x \geq k+1$, associo la coppia $(\tilde{f}, n) \in M_k \times \omega$ dove $n = f(k)$ e $\tilde{f}$ è definita come f salvo che assume il valore 0 in k.

Le funzioni f senza predecessore immediato sono quelle tali che $f(0) = 0$. ll tipo d'ordine del sottoinsieme C_0 di C constituito dalle funzioni senza predecessore immediato è uguale al tipo d'ordine di tutto C. Un isomorfismo da C_0 a C è dato dalla funzione che porta f in $\tilde{f}$, con $\tilde{f}(n) = f(n+1)$. In altre parole la successione $(0, a_1, a_2, \ldots)$ va nella successione $(a_1, a_2, \ldots)$. $\square$