Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 31 Maggio 2013

COGNOME E NOME

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi numerabili di $\aleph_1$.

Soluzione: $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Esercizio 2. Vero o falso? Se $\mathcal{P}(X) \in V_{\alpha+1}$, allora $X \in V_\alpha$.

Soluzione: vero.

Esercizio 3. Vero o falso? Esiste un insieme finito non vuoto $A \subseteq V_\omega$ tale che $V_\omega \setminus A$ è transitivo.

Soluzione: Falso. Se A è finito e incluso in V_ω allora $A \in V_\omega$. D'altra parte $A \notin A$ e quindi $A \in V_\omega \setminus A$. Se $V_\omega \setminus A$ fosse transitivo gli dovrebbero appartenere gli elementi di A. Assurdo.

Esercizio 4. Vero o falso? Esiste un insieme finito non vuoto $A \subseteq V_{\omega+1}$ tale che $V_{\omega+1} \setminus A$ è transitivo.

Soluzione: Vero. $A = \{\omega\}$ oppure $A = \{V_\omega\}$.

Esercizio 5. Ricordiamo la definizione di $\mathbb{Z}$ in termini insiemistici. Prima si definiscono le coppie ordinate $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e i prodotti cartesiani. Poi si pone

$$\mathbb{Z} = (\omega \times \omega)/E$$

dove E è la relazione di equivalenza definita da $(n, m)E(n', m')$ se e solo se $n + m' = m + n'$ (con l'idea che $n - m \in \mathbb{Z}$ è la classe di equivalenza di (n, m)).

Poste queste definizioni, si trovi il minimo ordinale β tale che $\mathbb{Z} \in V_\beta$.

Soluzione: $\omega + 2$.

Esercizio 6. Si trovi la forma normale di Cantor dell'ordinale numerabile $(\omega + \omega)^\omega$.

Soluzione: ω^ω.

Esercizio 7. Vero o falso? Esiste un ordinale α tale che $cf(\aleph_\alpha) < |\alpha|$.

Soluzione: Vero. $\alpha = \aleph_\omega$.