Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 5 Giugno 2013

COGNOME E NOME

Esercizio 1. Vero o falso? Se $\bigcup X \in ON$, allora $X \subseteq ON$.

Soluzione: Falso. Basta prendere $X = \{\{0, 2\}, \{1\}\}$.

Esercizio 2. Determinare i primi tre ordinali α con la seguente proprietà: per ogni $X \subseteq \alpha$, il tipo d'ordine di X è uguale ad α oppure il tipo d'ordine di $\alpha \setminus X$ è uguale ad α.

Soluzione: I primi due sono 0 ed ω. Il terzo è ω^2.

Esercizio 3. Quanti sono gli ordinali $\alpha < \omega_1$ tali che $\omega\alpha = \alpha$?

Soluzione: Sono $\aleph_1$, ed includono tutti quelli della forma $\omega^{\omega+x}$ con $x < \omega_1$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathcal{P}\,\mathbb{R} \to \mathcal{P}\,\mathbb{R}$ una funzione tale che $f(A) \subseteq A$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ e l'inclusione è stretta se A è non vuoto. Definiamo per ricursione sugli ordinali $A_0 = \mathbb{R}$, $A_{\alpha+1} = f(A_\alpha)$ e $A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ se λ è limite. Per quali ordinali α è possibile che $A_\alpha \neq \emptyset$?

Soluzione: Per gli α minori di $(2^{\aleph_0})^+$. Infatti, visto che $f(A)$ ha almeno un elemento in meno di A (per ogni A non vuoto), si vede subito che per ogni α di cardinalità superiore a $|\,\mathbb{R}\,|$ (ovvero $\alpha \geq {2^{\aleph_0}}^+$) dobbiamo avere $A_\alpha = \emptyset$. Viceversa dato un $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$ non è difficile costruire una f tale che $A_\alpha \neq 0$. Ad esempio se $\alpha = 2^{\aleph_0} + \omega$, posso identificare $\mathbb{R}$ con l'ordinale $2^{\aleph_0} + \omega + 1$ tramite una bigezione e per $\emptyset \neq A \subseteq 2^{\aleph_0} + \omega + 1$ posso definire $f(A)$ come A privato del suo primo elemento.

Esercizio 5. Vero o falso? Sia $X \subseteq ON \times ON$ e supponiamo che $(\alpha, 0) \in X$ per ogni $\alpha \in ON$ e che se $(x, y) \in X$ e $(y, x) \in X$ allora $(x, y + 1) \in X$. Possiamo concludere che $X = ON \times ON$?

Soluzione: No. Basta prendere $X = ON \times \{0\} \cup \omega \times \omega$.

Esercizio 6. Sia X un insieme tale che $\omega_1 \in X$ e per ogni insieme finito A, se $A \subseteq X$ allora $A \in X$. Quale è la minima cardinalità possibile di X?

Soluzione: Numerabile. Basta prendere $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ dove $X_0 = \{\omega_1\}$ e X_{n+1} è l'insieme delle parti di X_n.

Esercizio 7. Sia $(A, <)$ un ordine totale con la proprietà che tra due punti qualsiasi di A esiste al più una quantità numerabile di altri punti. Quale è la massima cardinalità possibile per A?

Soluzione: La risposta è $\aleph_1$. Infatti se prendiamo come $(A, <)$ l'ordinale ω_1 abbiamo che tra due punti di A esiste al più una quantità numerabile di altri punti. Questo mostra che la massima cardinalità possibile è $\geq \aleph_1$. Per l'altra disuguaglianza osserviamo che possiamo scrivere A come unione strettamente crescente $\bigcup_{i<\beta}[x_i, y_i]$ di intervalli, dove β è un ordinale (basta considerare la cofinalità di A rispetto all'ordine $<$ e all'ordine inverso $>$). Per le nostre ipotesi ciascun intervallo $[x_i, y_i]$ è al più numerabile, e quindi $|A| \leq |\beta| \cdot \aleph_0$. D'altra parte β è sicuramente $\leq \omega_1$, altrimenti troverei un intervallo che contiene $\aleph_1$ dei punti x_i, y_i (basta considerare l'intervallo $[x_j, y_j]$ con $j = \omega_1$).