Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prova scritta del 5 Giugno 2013

COGNOME E NOME

Esercizio 1. Vero o falso? Se $\bigcup X \in ON$, allora $X \subseteq ON$.

Esercizio 2. Determinare i primi tre ordinali α con la seguente proprietà: per ogni $X \subseteq \alpha$, il tipo d'ordine di X è uguale ad α oppure il tipo d'ordine di $\alpha \setminus X$ è uguale ad α.

Esercizio 3. Quanti sono gli ordinali $\alpha < \omega_1$ tali che $\omega\alpha = \alpha$?

Esercizio 4. Sia $f : \mathcal{P}\,\mathbb{R} \to \mathcal{P}\,\mathbb{R}$ una funzione tale che $f(A) \subseteq A$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ e l'inclusione è stretta se A è non vuoto. Definiamo per ricursione sugli ordinali $A_0 = \mathbb{R}$, $A_{\alpha+1} = f(A_\alpha)$ e $A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ se λ è limite. Per quali ordinali α è possibile che $A_\alpha \neq \emptyset$?

Esercizio 5. Vero o falso? Sia $X \subseteq ON \times ON$ e supponiamo che $(\alpha, 0) \in X$ per ogni $\alpha \in ON$ e che se $(x, y) \in X$ e $(y, x) \in X$ allora $(x, y + 1) \in X$. Possiamo concludere che $X = ON \times ON$?

Esercizio 6. Sia X un insieme tale che $\omega_1 \in X$ e per ogni insieme finito A, se $A \subseteq X$ allora $A \in X$. Quale è la minima cardinalità possibile di X?

Esercizio 7. Sia $(A, <)$ un ordine totale con la proprietà che tra due punti qualsiasi di A esiste al più una quantità numerabile di altri punti. Quale è la massima cardinalità possibile per A?