Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) La relazione binaria "essere cognati" è — 2 punti

- ■ simmetrica.
- □ una relazione di equivalenza.
- □ riflessiva.
- □ transitiva.

(b) Siamo Q e R formule proposizionali arbitrarie. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- □ Se R è soddisfacibile e Q $\models$ R allora anche Q deve essere soddisfacibile.
- □ Se Q e R sono soddisfacibili allora anche Q $\wedge$ R lo è certamente.
- ■ Q $\vee$ (Q $\to$ R) è una tautologia.
- ■ Se Q è soddisfacibile e Q $\models$ R allora anche R deve essere soddisfacibile.

(c) Sia φ la formula $\forall y\,(f(y,x)=a) \to \exists x\,(f(y,x)=a)$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ■ Ogni variabile che occorre in φ ha almeno un'occorrenza vincolata.
- ■ Vi sono variabili che occorrono sia libere che vincolate in φ.
- □ La formula φ è un enunciato.
- ■ $FV(\varphi) = \{x, y\}$

(d) Si considerino gli insiemi $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(g(n) = g(3))\}$ e $D = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(g(n) \neq 3)\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ■ $|B| < |D|$
- □ Tutti e tre gli insiemi sono numerabili.
- ■ $|B| = |C|$
- □ $|C| = |D|$

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$
\begin{aligned}
Q_1 &: \quad (C \land D) \lor A \\
Q_2 &: \quad B \leftrightarrow C \\
Q_3 &: \quad (B \land A) \lor (B \land D).
\end{aligned}
$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $Q_1, Q_2 \models Q_3$
- $Q_3, Q_1 \models Q_2$
- $Q_2, Q_3 \models Q_1$.

Soluzione: Innanzi tutto calcoliamo la tavola di verità:

B	C	D	A	Q_1	Q_2	Q_3
F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

$Q_1, Q_2 \not\models Q_3$, come testimoniato dalla seconda riga in cui B, C, D sono false e A è vera.

$Q_3, Q_1 \not\models Q_2$, come testimoniato dalla decima riga in cui B, A sono vere e C, D sono false.

$Q_2, Q_3 \models Q_1$, come testimoniato dalle ultime tre righe.

Esercizio 3 6 punti

Formalizzare in $\mathbb{N}$ le frasi seguenti nel linguaggio avente come simboli 1, $<$, $+$ e $\cdot$, tutti interpretati nella maniera usuale:

1. x è primo.
2. Ci sono numeri pari arbitrariamente grandi che sono somma di tre primi.

Soluzione: (i) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi(x)$ seguente:

$$1 < x \wedge \forall y \forall z\, (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee y = x).$$

(ii) Una possibile formalizzazione è

$$\forall y \exists z\, [y < z \wedge \exists w\, (w + w = z) \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\, (\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \varphi(x_3) \wedge z = x_1 + x_2 + x_3)].$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{g, h\}$ con g e h simboli di funzione binari e si consideri la L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$. Siano $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ le formule

$$\forall z \forall w\, (g(z, w) = y \to z = y \lor w = y) \qquad \text{e} \qquad \exists z\, (\neg(z = y) \land h(z, z) = y).$$

1. Si determini $\varphi(\mathcal{B})$.
2. Si determini $\psi(\mathcal{B})$.
3. L'enunciato $\neg \exists y\, (\varphi(y) \land \psi(y))$ è soddisfacibile?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{B} \models \varphi[y/n]$ se e solo se n non si può scrivere come somma di due numeri naturali diversi da esso. Questo è vero se $n = 0$ oppure $n = 1$, ma se $n \geq 2$ allora si può scrivere $n = (n - 1) + 1$ con $n - 1$ e 1 entrambi diversi da n. Quindi
$$\varphi(\mathcal{B}) = \{0, 1\}.$$

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{B} \models \psi[y/n]$ se e solo se n è il quadrato di un numero diverso da esso, ovvero
$$\psi(\mathcal{B}) = \{m^2 \mid m > 1\}.$$

3. L'enunciato proposto è soddisfacibile, come testimoniato da $\mathcal{B}$ stessa. Infatti, si ha che $\mathcal{B} \models \neg \exists y\, (\varphi(y) \land \psi(y))$ se e solo se non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, simultaneamente, $\mathcal{B} \models \varphi[y/n]$ e $\mathcal{B} \models \psi[y/n]$. Questo è equivalente a richiedere che $\varphi(\mathcal{B}) \cap \psi(\mathcal{B}) = \emptyset$, che è facilmente verificato.

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione su $m \geq 1$ che

$$\sum_{i=1}^{m}(3i-1) = \frac{3m^2+m}{2}.$$

Soluzione:

Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base $(m = 1)$**.** $\sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{(3 \cdot 1^2+1)}{2}$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=1}^{m}(3i-1) = \frac{3m^2+m}{2}$

Tesi induttiva: $\sum_{i=1}^{m+1}(3i-1) = \frac{3(m+1)^2+(m+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1}(3i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{m}(3i-1)\right) + (3(m+1)-1) \\
&= \frac{3m^2+m}{2} + 3m + 2 && \text{(Ip. ind.)} \\
&= \frac{3m^2+m+6m+4}{2} \\
&= \frac{3m^2+7m+4}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{3(m+1)^2+(m+1)}{2} = \frac{3(m^2+2m+1)+m+1}{2} = \frac{3m^2+7m+4}{2}.$$