Logica Matematica
6.4 – Esercizi di formalizzazione

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

Per ogni $n > 1$ c'è un primo compreso tra n^2 e $(n+1)^2$.

usando soltanto i simboli $\cdot$, $<$ e 1 (interpretati nella maniera usuale) e un simbolo di predicato unario P per "essere primo".

$$\forall x \left(x > 1 \rightarrow \exists y \exists z \left(x < y \wedge \neg \exists w (x < w < y) \right.\right.$$
$$\left.\left. \wedge\ x \cdot x < z < y \cdot y \wedge P(z)\right)\right)$$

Alternativa:

$$\forall x \forall y \left(x > 1 \wedge x < y \wedge \neg \exists w (x < w < y) \right.$$
$$\left. \rightarrow \exists z (x \cdot x < z < y \cdot y \wedge P(z))\right)$$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase:

> *Per ogni numero k ci sono numeri primi p arbitrariamente grandi tali che $p+k$ è primo e non c'è nessun primo compreso tra p e $p+k$.*

utilizzando il linguaggio contenente i simboli $+$, $<$ e il predicato unario P per "essere un numero primo".

$$\forall x \forall y \exists z \left(y < z \wedge P(z) \wedge P(z+x) \wedge \neg \exists w \, (z < w < z + x \wedge P(w))\right)$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Tutti i nipoti amano i propri nonni.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato due simboli di relazione binari G e A interpretati come segue:

- $G(x, y)$ se e solo se x è genitore di y,
- $A(x, y)$ se e solo se x ama y.

$$\forall x \forall y \left(\exists z (G(z, x) \land G(y, z)) \rightarrow A(x, y) \right)$$

Alternativa equivalente:

$$\forall x \forall y \forall z \left(G(y, x) \land G(z, y) \rightarrow A(x, z) \right)$$

Esercizio

Formalizzare nel linguaggio L che ha un simbolo di relazione unario P e un simbolo di funzione unario f la seguente frase

> *Se ci sono almeno due elementi che soddisfano la proprietà P, allora la funzione f è suriettiva.*

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L-struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

$$\exists x \exists y (P(x) \land P(y) \land \neg(x = y)) \to \forall y \exists x (f(x) = y)$$

Esercizio

Formalizzare le frasi

1. *Chi è amico di qualcuno che ama il cinema, ama il cinema.*
2. *Chi ama il teatro, è amico di qualcuno che ama il teatro.*
3. *Barbara è amica di Donatella e ama il teatro, ma non il cinema.*

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da:

- un simbolo di relazione unario C: $C(x) \rightsquigarrow$ "x ama il cinema";
- un simbolo di relazione unario T: $T(x) \rightsquigarrow$ "x ama il teatro";
- un simbolo di relazione binario A: $A(x, y) \rightsquigarrow$ "x è amico di y";
- due simboli di costante b e c interpretati come Barbara e Donatella.

1. $\forall x \left(\exists y(A(x, y) \wedge C(y)) \rightarrow C(x)\right)$
2. $\forall x \left(T(x) \rightarrow \exists y(A(x, y) \wedge T(y))\right)$
3. $A(b, d) \wedge T(b) \wedge \neg C(b)$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

Ogni numero dispari è somma di tre numeri primi.

usando soltanto i simboli di addizione $+$ e un simbolo di predicato unario P per "essere primo".

$$\forall x \left(\neg \exists y \, (y + y = x) \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \right.$$
$$\left. (P(z_1) \wedge P(z_2) \wedge P(z_3) \wedge x = z_1 + z_2 + z_3)\right)$$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre primi.

usando solo l'ordinamento $<$, la somma $+$ e il predicato unario P per "essere primo".

$$\exists x \forall y \big(x < y \land \neg \exists z (z + z = y) \to \exists w_1 \exists w_2 \exists w_3 \\ (P(w_1) \land P(w_2) \land P(w_3) \land y = w_1 + w_2 + w_3) \big)$$

Esercizio

Formalizzare la frase

> *Se tutti i tedeschi sono biondi e Andrea non è biondo, allora Andrea non è tedesco.*

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone e utilizzando un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari T e B e un simbolo di costante a interpretati come segue:

- $T(x) \rightsquigarrow$ "x è tedesco";
- $B(x) \rightsquigarrow$ "x è biondo";
- $a \rightsquigarrow$ Andrea.

$$\forall x(T(x) \to B(x)) \wedge \neg B(a) \ \to \ \neg T(a)$$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> *Se ci sono numeri arbitrariamente grandi che soddisfano la proprietà P, allora almeno uno di questi è un numero quadrato.*

usando solo i simboli $<$ e $\cdot$ (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo di relazione unario P.

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \exists z (x = z \cdot z))$$

Alternativa più breve:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \rightarrow \exists x \, P(x \cdot x)$$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

> *Ogni numero naturale sufficientemente grande è somma di quattro cubi.*

usando solo i simboli $<$, $+$ e $\cdot$ (interpretati nella maniera usuale).

$$\exists x \forall y \left(x < y \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 \right.$$
$$\left. (y = z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 + z_2 \cdot z_2 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_3 \cdot z_3 + z_4 \cdot z_4 \cdot z_4) \right)$$

Esercizio

Formalizzare la frase

Nessun ladro è onesto, ma c'è un ladro gentiluomo che è onesto.

considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio del prim'ordine formato da tre simboli di relazione unari L, O e G interpretati come segue:

- $L(x) \rightsquigarrow$ "x è un ladro";
- $O(x) \rightsquigarrow$ "x è onesto";
- $G(x) \rightsquigarrow$ "x è un gentiluomo".

$$\neg\exists x\big(L(x) \land O(x)\big) \;\land\; \exists x\big(L(x) \land G(x) \land O(x)\big)$$

Alternativa:

$$\forall x\big(L(x) \to \neg O(x)\big) \;\land\; \exists x\big(L(x) \land G(x) \land O(x)\big)$$

Esercizio

Formalizzare la seguente frase

> *Se ci sono almeno tre elementi che soddisfano la proprietà P, allora ci sono al più due elementi che soddisfano la proprietà Q.*

usando il linguaggio formato da due simboli di relazione unari P e Q.

(Come universo del discorso si può prendere il dominio di qualunque L-struttura: per la sua forma, la frase è in questo caso indipendente dalla struttura scelta.)

$$\exists x \exists y \exists z \big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \big) \\ \rightarrow \neg \exists x \exists y \exists z \big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Q(x) \wedge Q(y) \wedge Q(z) \big)$$

Esercizio

Formalizzare le frasi

1. *C'è qualche impiegato che, pur lavorando bene, viene licenziato dal proprio capoufficio.*
2. *Il capoufficio di Ugo non licenzia alcun impiegato che lavori bene.*
3. *Qualunque impiegato che non lavori bene viene licenziato dal proprio capoufficio, a meno che si tratti di Ugo.*

nel linguaggio formato da due predicati unari I e B, un predicato binario L, un simbolo di funzione unario c e un simbolo di costante u, dove

- $I(x)$ se e solo se x è un impiegato;
- $B(x)$ se e solo se x lavora bene;
- $L(x, y)$ se e solo se x licenzia y;
- $c(x) =$ il capoufficio di x;
- $u =$ Ugo.

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

Il più piccolo numero primo è pari.

usando i simboli $<$, $+$ (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per "essere un numero primo".

$$\forall x \big(P(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge y \neq x \to x < y) \to \exists z (x = z + z) \big)$$

Esercizio

Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> *Preso un numero maggiore di 1 e il suo successore, tra i loro quadrati c'è sempre un numero primo.*

usando i simboli $<$, $+$, $\cdot$, 1 (interpretati nella maniera usuale) e il predicato unario P per "essere un numero primo".

$$\forall x \forall y \left(1 < x \wedge y = x + 1 \rightarrow \exists z (P(z) \wedge x \cdot x < z < y \cdot y)\right)$$

Alternativa più breve:

$$\forall x \left(1 < x \rightarrow \exists z (P(z) \wedge x \cdot x < z < (x+1) \cdot (x+1))\right)$$

Esercizio

Formalizzare la frase

> *Chi non studia e non svolge alcun esercizio non supera l'esame di logica.*

in un linguaggio del prim'ordine con due simboli di relazione unari S e E, due simboli di relazione binari F e P, un simbolo di funzione unario f ed un simbolo di costante l interpretati come segue:

- $S(x) \rightsquigarrow$ "x studia";
- $E(x) \rightsquigarrow$ "x è un esercizio";
- $F(x, y) \rightsquigarrow$ "x svolge y";
- $P(x, y) \rightsquigarrow$ "x supera y";
- $f(x) \rightsquigarrow$ "l'esame della materia x";
- $l \rightsquigarrow$ "logica".

$$\forall x \left(\neg S(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow \neg F(x, y)) \rightarrow \neg P(x, f(l))\right)$$