Linguaggi Formali e Traduttori

- Grammatiche libere dal contesto, automi a pila –

Alcuni esercizi risolti

1. Scrivere una grammatica libera dal contesto per ognuno dei seguenti insiemi:

a) l’insieme $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \,\&\, i \neq j\}$, cioè l’insieme delle stringhe in cui il numero di a è diverso dal numero di b.

$S \rightarrow aSb \mid aA \mid Bb$
$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow Bb \mid \varepsilon$

c) l’insieme delle stringhe con un numero uguale di 0 e di 1.

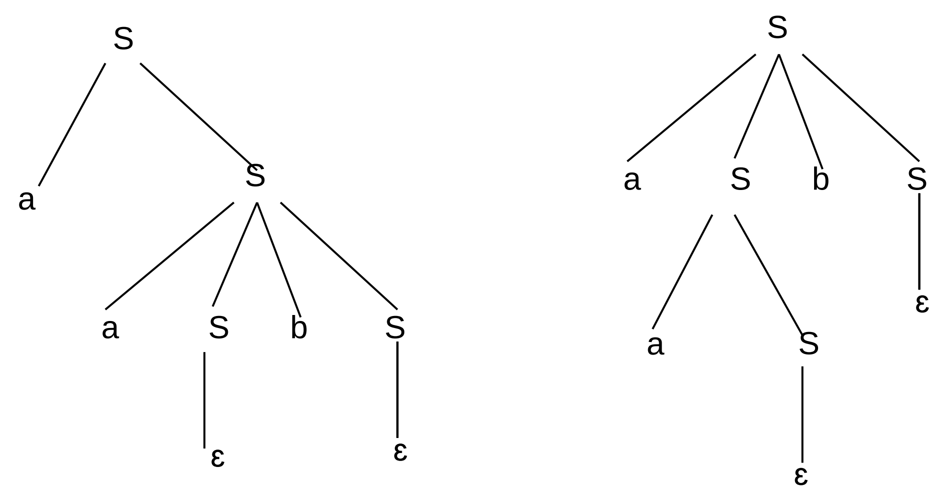
$S \rightarrow 0S1S \mid 1S0S \mid \varepsilon$

e) l’insieme delle stringhe di parentesi tonde e quadre bilanciate.
Ad esempio [[([ ] (( )))]] è bilanciata, mentre non lo è la stringa [[ ] ( ]).

$P \rightarrow (P) \mid [P] \mid PP \mid \varepsilon$

2. La seguente grammatica è ambigua $S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$. Mostrare che la stringa “aab” ha:

a) due alberi sintattici



b) due derivazioni a sinistra

$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aab$
$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aab$

3. La seguente grammatica genera espressioni in notazione prefissa:

$$E \to +EE \mid *EE \mid -EE \mid x \mid y$$

a) trovare una derivazione a sinistra e una derivazione a destra per la stringa
"+ * x y-x y"

Derivazione a sinistra:

$$E \Rightarrow +EE \Rightarrow +*EEE \Rightarrow +*xEE \Rightarrow +*xyE \Rightarrow +*xy-EE \Rightarrow +*xy-xy$$

b) la grammatica è ambigua? Motivare la risposta.

Nella generazione di una parola del linguaggio con una derivazione a sinistra vi è solo un modo per sostituire ogni occorrenza della variabile E; la grammatica perciò non può essere ambigua.

4. L'automa a pila $P = (\{p,q\}, \{0,1\}, \{X,Z0\}, \delta, q, Z0, \{p\})$ ha la seguente funzione di transizione:

$\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
$\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$
$\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$
$\delta(q, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$
$\delta(p, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$
$\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$
$\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \varepsilon)\}$

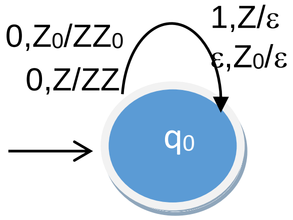
A partire dalla descrizione istantanea iniziale (q, w, Z_0), mostrare tutte le descrizioni istantanee raggiungibili dall'automa con gli input:

a) 01

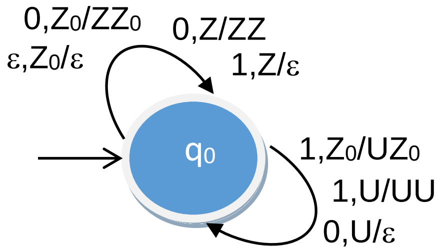
$(q, 01, Z_0) \vdash (q, 1, XZ_0) \vdash (q, \varepsilon, XZ_0)$
$(q, 01, Z_0) \vdash (q, 1, XZ_0) \vdash (p, 1, Z_0) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$

5. Definire per ognuno dei seguenti linguaggi un automa a pila che accetti per stack vuoto:

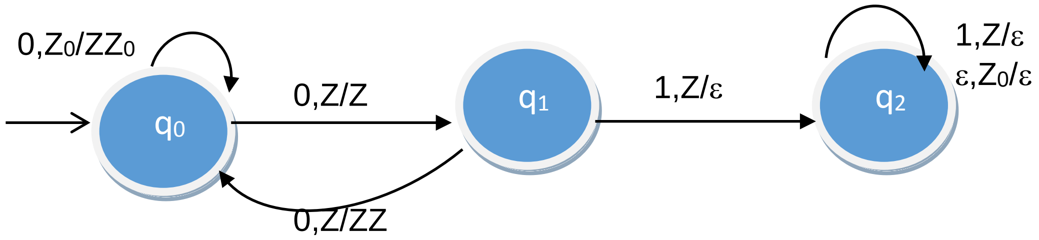
a) Insieme delle stringhe di 0 e 1 tali che nessun prefisso abbia più 1 che 0.



b) Insieme delle stringhe di 0 e 1 con lo stesso numero di 0 e di 1.



c) Insieme delle stringhe di 0 e 1 in cui gli 0 precedono gli 1 e il numero di 0 è doppio del numero di 1 ($\{0^{2n}1^n \mid n > 0\}$).



6. L'automa P ha la seguente funzione di transizione (le parentesi graffe sono state omesse in quanto la funzione di transizione ha un solo valore per ogni elemento del dominio, δ: Q x ($\Sigma \cup \{\varepsilon\}$) x $\Gamma \rightarrow$ Q x Γ^*)

$\delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AAZ_0)$	$\delta(q_0, b, Z_0) = (q_2, BZ_0)$	$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = (f, \varepsilon)$
$\delta(q_1, a, A) = (q_1, AAA)$	$\delta(q_1, b, A) = (q_1, \varepsilon)$	$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$
$\delta(q_2, a, B) = (q_3, \varepsilon)$	$\delta(q_2, b, B) = (q_2, BB)$	$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$
$\delta(q_3, \varepsilon, B) = (q_2, \varepsilon)$	$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = (q_1, AZ_0)$	

1) scrivere una traccia d'esecuzione (cioè una sequenza di descrizioni istantanee) per dimostrare che la stringa "bab" è in L(P);

$(q_0, bab, Z_0) \vdash (q_2, ab, BZ_0) \vdash (q_3, b, Z_0) \vdash (q_1, b, AZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash$
$\vdash (q_0, \varepsilon, Z_0) \vdash (f, \varepsilon, \varepsilon)$

3) scrivere il contenuto dello stack dopo che P ha letto b^7a^4: Z_0 oppure AZ_0

7. Per ognuno dei seguenti linguaggi liberi dal contesto definire un automa push-down che lo accetti per stack vuoto.

b) $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k, > 0 \;\&\; i = 2j \text{ oppure } j = 2k\}$

L'automa può facilmente essere costruito a partire da una grammatica che generi il linguaggio. Ad esempio la grammatica con le seguenti produzioni:
$S \rightarrow AB \mid CD$
$A \rightarrow aaAb \mid aab$ $\quad B \rightarrow cB \mid c$
$C \rightarrow aC \mid a$ $\quad D \rightarrow bbDc \mid bbc$

Funzione di transizione dell'automa:

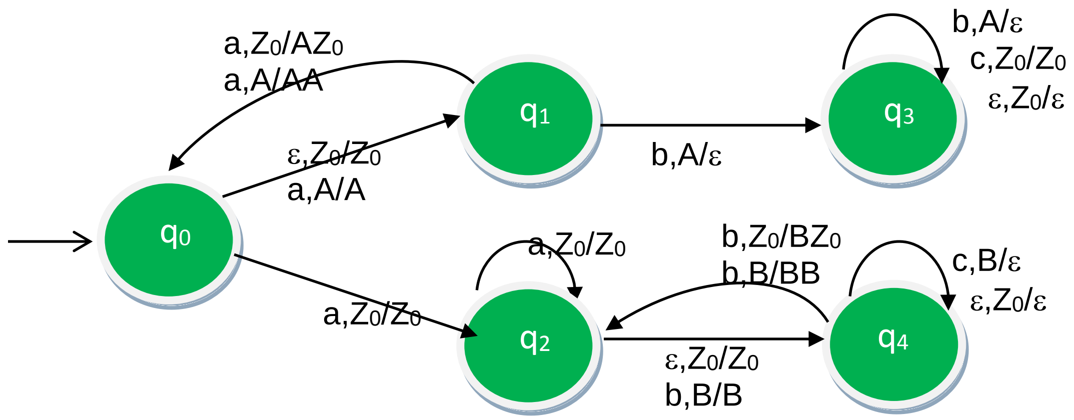
$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, AB), (q, CD)\}$

$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, aaAb), (q, aab)\}$ $\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, cB), (q, c)\}$

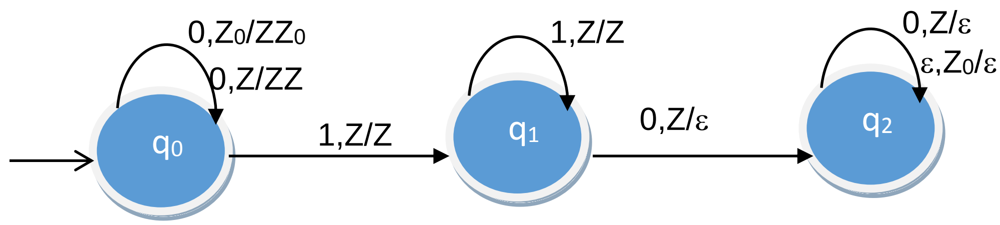
$\delta(q, \varepsilon, C) = \{(q, aC), (q, a)\}$ $\delta(q, \varepsilon, D) = \{(q, bbDc), (q, bbc)\}$

$\delta(q, a, a) = \delta(q, b, b) = \delta(q, c, c) = \{(q, \varepsilon)\}$

Un automa costruito direttamente:



c) $\{0^n 1^m 0^n \mid n, m > 0\}$

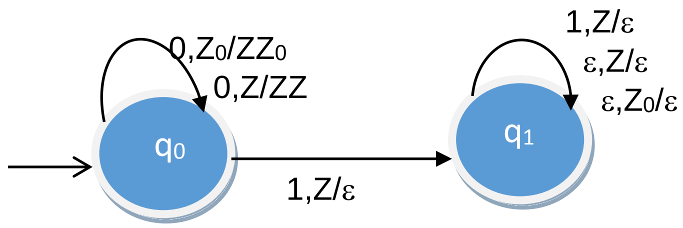


e) $\{0^n 1^m \mid n \geq m > 0\}$

Tabella di transizione

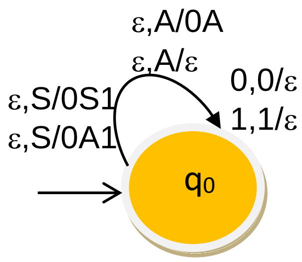
	$0, Z_0$	$0, Z$	$1, Z$	ε, Z	ε, Z_0
→ q_0	q_0, ZZ_0	q_0, ZZ	q_1, ε		
q_1			q_1, ε	q_1, ε	q_1, ε

Diagramma di transizione



Costruzione alternativa a partire dalla grammatica:

G = ({S, A}, {0, 1}, P, S)   P = {S → 0S1 | 0A1, A → 0A | ε}



8. Si considerino i due linguaggi:

$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n,m \geq 0\}$
$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n,m \geq 0\}$

a) dimostrare che sono entrambi liberi costruendo una grammatica per ognuno;

$G_1 = (\{S_1,A_1,B_1\}, \{a,b,c\}, P_1, S_1)$ $P_1 = \{S_1 \to A_1B_1,\ A_1 \to aA_1bb \mid \varepsilon,\ B_1 \to cB_1 \mid \varepsilon\}$
$G_2 = (\{S_2,A_2,B_2\}, \{a,b,c\}, P_2, S_2)$ $P_2 = \{S_2 \to A_2B_2,\ A_2 \to aA_2 \mid \varepsilon,\ B_2 \to bS_2cc \mid \varepsilon\}$

b) costruire una grammatica per la loro unione e la concatenazione;

$G_U = (\{S, S_1, S_2, A_1, A_2, B_1, B_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$ $P = \{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2$
$G_C = (\{S, S_1, S_2, A_1, A_2, B_1, B_2\}, \{a, b, c\}, P, S)$ $P = \{S \to S_1S_2\} \cup P_1 \cup P_2$

c) costruire una grammatica per la chiusura di Kleene di L_1;

$G_K = (\{S, S_1, A_1, B_1\}, \{a, b, c\}, P, S)$ $P = \{S \to S_1S \mid \varepsilon\} \cup P_1$

d) $L1 \cap L2$ è un linguaggio context-free? Giustificare la risposta.

$L1 \cap L2 = \{a^k b^{2k} c^{4k} \mid k \geq 0\}$

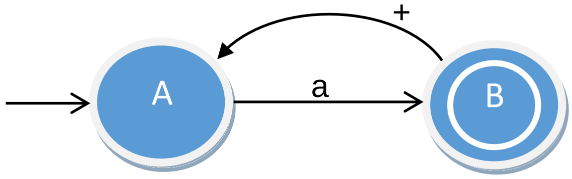
Il linguaggio non è context-free in quanto nelle stringhe del linguaggio sia il numero di *b* sia il numero di *c* dipendono dal numero di *a*; le grammatiche context-free sono in grado di generare stringhe con al massimo le occorrenze di coppie di caratteri legate da una relazione.

9. Fornire una grammatica lineare destra per i linguaggi denotati dalle seguenti espressioni regolari:

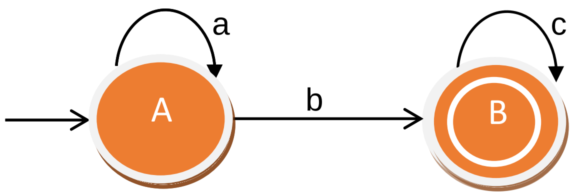
		Produzioni
a)	a^+bc^+	$S \to aS \mid abC \quad C \to cC \mid c$
b)	$(a \mid b)^*abb$	$S \to aS \mid bS \mid abb$
c)	$(ab^* \mid c)^*a$	$S \to aB \mid cS \mid a \quad B \to bB \mid S$

10. Per ognuna delle seguenti grammatiche, di cui è dato l'insieme delle produzioni, trovare un automa che riconosca il linguaggio generato.

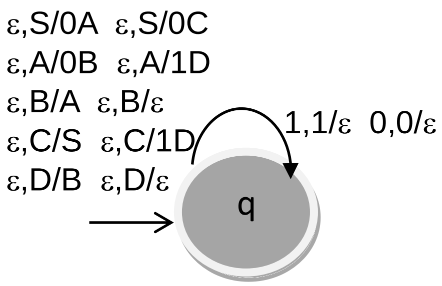
a) P_1: $\{S \to a \mid a + S\}$ Il linguaggio generato è denotato da $(a\ +)^*a$



b) P_2: $\{S \to aS \mid bA,\ A \to cA \mid \varepsilon\}$ Il linguaggio generato è denotato da a^*bc^*



c) P_3: $\{S \to 0A \mid 0C,\ A \to 0B \mid 1D,\ B \to A \mid \varepsilon,\ C \to S \mid 1D,\ D \to B \mid \varepsilon\}$



Anche il linguaggio generato dalla grammatica con produzioni P_3 è regolare in quanto la grammatica è lineare destra. Esiste pertanto anche un automa finito che riconosce il linguaggio.