Prova di Logica Matematica 23 gennaio 2020 Versione 4

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Sia φ la formula $\exists z\,(\forall y\, R(z, y) \wedge R(y, z))$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ $FV(\varphi) = \{y\}$

■ Ogni variabile che occorre in φ ha almeno un'occorrenza vincolata.

■ Vi sono variabili che occorrono sia libere che vincolate in φ.

□ La formula φ è un enunciato.

(b) Siamo S e P formule proposizionali arbitrarie. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ $\mathrm{S} \vee (\mathrm{S} \to \mathrm{P})$ è una tautologia.

■ Se S è soddisfacibile e $\mathrm{S} \models \mathrm{P}$ allora anche P deve essere soddisfacibile.

□ Se P è soddisfacibile e $\mathrm{S} \models \mathrm{P}$ allora anche S deve essere soddisfacibile.

□ Se S e P sono soddisfacibili allora anche $\mathrm{S} \wedge \mathrm{P}$ lo è certamente.

(c) La relazione binaria "essere coniugi" è 2 punti

□ una relazione di equivalenza.

□ riflessiva.

□ transitiva.

■ simmetrica.

(d) Si considerino gli insiemi $D = \{-5n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(k(n) = k(1))\}$ e $B = \{k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(k(n) \neq 1)\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ $|D| = |A|$

□ $|A| = |B|$

■ $|D| < |B|$

□ Tutti e tre gli insiemi sono numerabili.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_1 :&\quad (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee \mathrm{C} \\ \mathrm{S}_2 :&\quad \mathrm{D} \leftrightarrow \mathrm{A} \\ \mathrm{S}_3 :&\quad (\mathrm{D} \wedge \mathrm{C}) \vee (\mathrm{D} \wedge \mathrm{B}). \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \models \mathrm{S}_3$
- $\mathrm{S}_3, \mathrm{S}_1 \models \mathrm{S}_2$
- $\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3 \models \mathrm{S}_1$.

Soluzione: Innanzi tutto calcoliamo la tavola di verità:

D	A	B	C	S_1	S_2	S_3
F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

$\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \not\models \mathrm{S}_3$, come testimoniato dalla seconda riga in cui $\mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ sono false e C è vera.

$\mathrm{S}_3, \mathrm{S}_1 \not\models \mathrm{S}_2$, come testimoniato dalla decima riga in cui D, C sono vere e A, B sono false.

$\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3 \models \mathrm{S}_1$, come testimoniato dalle ultime tre righe.

Esercizio 3 6 punti

Formalizzare in $\mathbb{N}$ le frasi seguenti nel linguaggio avente come simboli 1, $<$, $+$ e $\cdot$, tutti interpretati nella maniera usuale:

1. x è primo.
2. Ci sono numeri dispari arbitrariamente grandi che sono somma di tre primi.

Soluzione: (i) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi(x)$ seguente:

$$1 < x \land \forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = 1 \lor y = x).$$

(ii) Una possibile formalizzazione è

$$\forall y \exists z\,[y < z \land \neg\exists w\,(w + w = z) \land \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\,(\varphi(x_1) \land \varphi(x_2) \land \varphi(x_3) \land z = x_1 + x_2 + x_3)].$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{k, f\}$ con k e f simboli di funzione binari e si consideri la L-struttura $\mathcal{D} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$. Siano $\varphi(w)$ e $\psi(w)$ le formule

$$\forall x \forall y\, (k(x, y) = w \to x = w \lor y = w) \qquad \text{e} \qquad \exists x\, (\neg(x = w) \land f(x, x) = w).$$

1. Si determini $\varphi(\mathcal{D})$.
2. Si determini $\psi(\mathcal{D})$.
3. L'enunciato $\neg\exists w\, (\varphi(w) \land \psi(w))$ è soddisfacibile?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{D} \models \varphi[w/n]$ se e solo se n non si può scrivere come somma di due numeri naturali diversi da esso. Questo è vero se $n = 0$ oppure $n = 1$, ma se $n \geq 2$ allora si può scrivere $n = (n - 1) + 1$ con $n - 1$ e 1 entrambi diversi da n. Quindi
$$\varphi(\mathcal{D}) = \{0, 1\}.$$

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{D} \models \psi[w/n]$ se e solo se n è il quadrato di un numero diverso da esso, ovvero
$$\psi(\mathcal{D}) = \{m^2 \mid m > 1\}.$$

3. L'enunciato proposto è soddisfacibile, come testimoniato da $\mathcal{D}$ stessa. Infatti, si ha che $\mathcal{D} \models \neg\exists w\, (\varphi(w) \land \psi(w))$ se e solo se non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, simultaneamente, $\mathcal{D} \models \varphi[w/n]$ e $\mathcal{D} \models \psi[w/n]$. Questo è equivalente a richiedere che $\varphi(\mathcal{D}) \cap \psi(\mathcal{D}) = \emptyset$, che è facilmente verificato.

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione su $l \geq 1$ che

$$\sum_{i=1}^{l}(3i-1) = \frac{3l^2+l}{2}.$$

Soluzione:

Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base ($l=1$). $\sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3\cdot 1 - 1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{(3\cdot 1^2+1)}{2}$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=1}^{l}(3i-1) = \frac{3l^2+l}{2}$

Tesi induttiva: $\sum_{i=1}^{l+1}(3i-1) = \frac{3(l+1)^2+(l+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l+1}(3i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{l}(3i-1)\right) + (3(l+1)-1) \\
&= \frac{3l^2+l}{2} + 3l + 2 && \text{(Ip. ind.)} \\
&= \frac{3l^2+l+6l+4}{2} \\
&= \frac{3l^2+7l+4}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{3(l+1)^2+(l+1)}{2} = \frac{3(l^2+2l+1)+l+1}{2} = \frac{3l^2+7l+4}{2}.$$