Istruzioni esame

- Scrivere in STAMPATELLO cognome, nome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ La disgiunzione di due proposizioni soddisfacibili è certamente soddisfacibile.
□ Se una proposizione non è una contraddizione, allora è una tautologia.
□ La negazione di una proposizione soddisfacibile è certamente insoddisfacibile.
□ La congiunzione di due proposizioni soddisfacibili è certamente soddisfacibile.

(b) Utilizzando i simboli $\cdot$ e 1 interpretati nel modo usuale, quali delle seguenti sono formalizzazioni in $\mathbb{N}$ dell'affermazione "x è primo"? 2 punti

□ $\exists x(\neg(x = 1) \land \forall y \forall z(y \cdot z = x \to y = 1 \lor z = 1))$
□ $\exists x \neg(x = 1) \land \neg\exists y(\neg(y = 1) \land y \cdot x = x)$
■ $\neg(x = 1) \land \forall y(\neg\exists z(\neg(z = x) \land \neg(z = 1) \land y \cdot z = x))$
□ $\forall x \exists y(x \cdot 1 = x \land \neg(x \cdot y = x))$

(c) La relazione "avere cognomi diversi" è 2 punti

□ transitiva.
□ riflessiva.
□ antisimmetrica.
■ simmetrica.

(d) Quali dei seguenti insiemi sono più che numerabili? 2 punti

□ $\{w \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall \ell\,(w(\ell) < 1)\}$
■ $\{w \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall \ell\,(w(\ell) \geq 5)\}$
■ $\{w \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall \ell\,(w(\ell) < 5)\}$
■ $\{w \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid w(2) = 2\}$

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} \mathrm{S}: &\quad (\mathrm{D} \wedge \mathrm{A}) \vee \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{P}: &\quad \mathrm{B} \wedge (\neg \mathrm{A} \to \mathrm{D}) \\ \mathrm{Q}: &\quad (\mathrm{B} \to \mathrm{D}) \wedge (\neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B}). \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali dei seguenti insiemi di proposizioni sono soddisfacibili:

$$\{\mathrm{S}, \mathrm{P}\}, \quad \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\}, \quad \{\mathrm{S}, \mathrm{Q}\}, \quad \{\mathrm{S}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}\}.$$

Soluzione: Osserviamo che $\mathrm{Y} \vee \neg \mathrm{X} \equiv \mathrm{X} \to \mathrm{Y} \equiv \neg \mathrm{Y} \to \neg \mathrm{X}$ e che $(\mathrm{X} \to \mathrm{Y}) \wedge (\mathrm{X} \to \mathrm{Z}) \equiv \mathrm{X} \to (\mathrm{Y} \wedge \mathrm{Z})$, dove $\equiv$ sta per "equivalenza logica". Quindi

$$\mathrm{Q} \equiv (\mathrm{B} \to \mathrm{D}) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{A}) \equiv \mathrm{B} \to (\mathrm{D} \wedge \mathrm{A}) \equiv \mathrm{S}.$$

Ne segue che

- gli insiemi $\{\mathrm{S}, \mathrm{P}\}$, $\{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\}$ e $\{\mathrm{S}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}\}$ sono logicamente equivalenti e soddisfacibili: basta prendere un'interpretazione i tale che $i(\mathrm{D}) = i(\mathrm{A}) = i(\mathrm{B}) = 1$;

- $\{\mathrm{S}, \mathrm{Q}\}$ è logicamente equivalente a $\{\mathrm{S}\} \subseteq \{\mathrm{S}, \mathrm{P}\}$ che è soddisfacibile per quanto visto al punto precedente.

(Naturalmente queste equivalenze potevano essere verificate anche mediante un'opportuna tavola di verità con $2^3 = 8$ righe.)

Esercizio 3 6 punti

Formalizzare in $\mathbb{R}$ le frasi seguenti nel linguaggio avente solo il simbolo $\cdot$ interpretato nella maniera usuale:

1. x è uguale a zero
2. u è uguale a uno
3. Ogni numero invertibile è non nullo.

Soluzione: (1) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi_0(x)$ seguente:

$$\forall z(z \cdot x = x).$$

(2) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi_1(u)$ seguente:

$$\forall y(y \cdot u = y).$$

(3) Una possibile formalizzazione è

$$\forall x(\exists y \exists u(\varphi_1(u) \land x \cdot y = u) \rightarrow \neg\varphi_0(x)).$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{S, k, d\}$ con S simbolo di relazione binario, k simbolo di funzione binario e d simbolo di costante. Consideriamo la struttura $\mathcal{D} = \langle \mathbb{N}, >, +, 0 \rangle$.

Sia φ l'enunciato

$$\forall w\, (\exists x\, (k(x, x) = w) \lor S(w, d))$$

e sia ψ l'enunciato

$$\forall w\, (\exists x\, (k(x, x) = w)) \lor \forall w\, S(w, d)$$

1. È vero che $\mathcal{D} \models \varphi$?
2. È vero che $\mathcal{D} \models \psi$?
3. È vero che ψ è conseguenza logica di φ?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'interpretazione di φ in $\mathcal{D}$ è

   > Per ogni numero naturale n, o $n = m + m$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ oppure $n > 0$,

   ovvero

   > Dato un numero naturale qualsiasi, o è pari oppure è strettamente maggiore di 0.

   Dunque $\mathcal{D} \models \varphi$, poiché i numeri naturali dispari sono tutti strettamente maggiori di 0.

2. L'interpretazione di ψ in $\mathcal{D}$ è

   > O per ogni numero naturale n esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m + m$, oppure ogni numero naturale k è tale che $k > 0$,

   ovvero

   > Tutti i numeri naturali sono pari, oppure tutti i numeri naturali sono strettamente maggiori di 0.

   Dunque $\mathcal{D} \not\models \psi$, poiché entrambe le affermazioni sono palesemente false.

3. Poiché $\mathcal{D} \models \varphi$ ma $\mathcal{D} \not\models \psi$, la struttura $\mathcal{D}$ stessa testimonia che $\varphi \not\models \psi$, ovvero che ψ non è conseguenza logica di φ.

Esercizio 5 6 punti

Sia $\langle d_\ell \rangle_{\ell \in \mathbb{N}}$ la successione definita per ricorsione come segue:

$$\begin{cases} d_0 = 0 \\ d_{\ell+1} = \frac{1}{5}\left(d_\ell + \frac{1}{5^\ell}\right) \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ si ha

$$d_\ell = \frac{\ell}{5^\ell}.$$

Soluzione:

Per induzione su $\ell \geq 0$.

Passo base $(\ell = 0)$**.** $d_0 = 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{5^0}$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $d_\ell = \frac{\ell}{5^\ell}$

Tesi induttiva: $d_{\ell+1} = \frac{\ell+1}{5^{\ell+1}}$

$$\begin{aligned} d_{\ell+1} &= \frac{1}{5}\left(d_\ell + \frac{1}{5^\ell}\right) && \text{(per definizione)} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{\ell}{5^\ell} + \frac{1}{5^\ell}\right) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{\ell+1}{5^\ell}\right) \\ &= \frac{\ell+1}{5^{\ell+1}}. \end{aligned}$$