Prova di Logica Matematica 8 gennaio 2020 Versione 1

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ■ $\{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 3 \wedge s(2) = 1\}$
- □ $\{s \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 3 \wedge s(2) = 1\}$
- ■ $\{s \in \mathbb{N}^3 \mid s(2) = 1\}$
- □ $\{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s(2) = 1\}$

(b) Sia R la relazione "non essere consecutivi" sui numeri naturali. 2 punti
Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ■ La relazione R è riflessiva.
- ■ La relazione R è simmetrica.
- □ La relazione R è transitiva.
- □ La relazione R è un pre-ordine.

(c) Sia φ la formula $\forall x \exists z \neg R(x,z)$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- □ φ non è un enunciato.
- □ Alcuni termini che occorrono in φ hanno altezza 1.
- □ L'altezza di φ è 2.
- ■ L'insieme delle variabili libere di φ è vuoto.

(d) Sia P una tautologia, Q una contraddizione e R un'arbitraria formula proposizionale. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti

- ■ $\mathrm{P} \leftrightarrow \neg \mathrm{Q}$ è una tautologia.
- ■ $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$.
- ■ $\mathrm{Q} \models \mathrm{P} \wedge \mathrm{R}$.
- ■ Se $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$ allora R è una tautologia.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Utilizzando la logica proposizionale, dimostrare che per ogni coppia di insiemi A e B vale l'inclusione

$$\complement A \cup B \subseteq \complement(A \triangle B) \cup \complement A.$$

Soluzione: Bisogna verificare che per ogni x

$$x \in \complement A \cup B \to x \in \complement(A \triangle B) \cup \complement A.$$

Utilizzando le definizioni delle operazioni insiemistiche, si ottiene che la formula precedente è equivalente a

$$\neg(x \in A) \vee x \in B \to \neg(x \in A \triangle B) \vee \neg(x \in A),$$

ovvero a

$$\neg(x \in A) \vee x \in B \to \neg((x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A))) \vee \neg(x \in A),$$

che è una formula del tipo

$$\neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \to \neg((\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{P})) \vee \neg \mathrm{P}.$$

Poiché quest'ultima è una tautologia (come si verifica facilmente mediante tavole di verità), l'inclusione insiemistica di partenza è valida per ogni A, B.

Esercizio 3 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

   x e y sono numeri consecutivi

   utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $<$ interpretato nella maniera usuale.
2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$ e $+$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

   Se due numeri sono consecutivi, almeno uno dei due è pari.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è

$$\neg\exists z\,(x < z \land z < y) \land \neg\exists z(y < z \land z < x).$$

2. Una possibile formalizzazione è

$$\forall x\forall y\,[\neg\exists z\,(x < z\land z < y)\land\neg\exists z(y < z\land z < x) \to \exists w\,(x = w+w)\lor\exists w\,(y = w+w)].$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{P, f, a\}$ con P simbolo di relazione unaria, f simbolo di funzione binaria e a simbolo di costante. Sia φ la formula

$$P(x) \land \exists y(f(y, a) = x).$$

Determinare l'insieme di verità di φ in ciascuna delle seguenti L-strutture:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, \cdot, 2\rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è l'insieme dei numeri primi.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, P^{\mathcal{B}}, \cdot, 0\rangle$, dove $P^{\mathcal{B}}$ è l'insieme dei numeri non negativi.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione: Si osservi che $FV(\varphi) = \{x\}$, quindi l'insieme di verità di φ in una data struttura sarà un sottoinsieme del suo dominio.

1. La formula φ interpretata in $\mathcal{A}$ afferma che

   x è un numero primo ed è pari.

   Quindi si ha che $\varphi(\mathcal{A}) = \{2\}$.

2. La formula φ interpretata in $\mathcal{B}$ afferma che

   $x \geq 0$ e $x = y \cdot 0$ per qualche $y \in \mathbb{R}$.

   Quindi si ha che $\varphi(\mathcal{B}) = \{0\}$.

Esercizio 5 6 punti

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 1.$$

Soluzione: Per induzione su $n \geq 0$.

Passo base ($n = 0$). Si ha che $a_0 = 5 = 3 \cdot 2^{0+1} - 1$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$.

Tesi induttiva: $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{(n+1)+1} - 1$.

Per definizione di a_{n+1} si ha che

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\ &= 2(3 \cdot 2^{n+1} - 1) + 1 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\ &= 3 \cdot 2^{(n+1)+1} - 2 + 1 \\ &= 3 \cdot 2^{(n+1)+1} - 1. \end{aligned}$$