Logica Matematica
1.2 – Simboli logici

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Simboli

Per poter analizzare il ragionamento matematico, è necessario innanzitutto individuare quali simboli e costrutti linguistici vengono usati. Scorrendo un testo di analisi matematica ci si imbatte in vari tipi di simboli.

- Le lettere x, y, z, ... in genere designano numeri reali arbitrari, mentre le lettere $k, m, n, \dots$ denotano numeri naturali. In ogni caso, il loro ruolo è quello di essere *variabili*, ovvero quello di indicare un generico numero anziché identificarne uno specifico.
- Al contrario, certe lettere designano numeri ben specifici: sono cioè delle *costanti*. Per esempio la lettera π rappresenta un preciso numero reale, ovvero il rapporto tra la lunghezza del diametro e la lunghezza della circonferenza. Il suo valore è $\pi = 3{,}14159\dots$.

- Alcuni simboli denotano *operazioni* tra numeri o particolari *funzioni*. Ad esempio, i simboli $+$ e $\cdot$ denotano le operazioni binarie di somma e prodotto, mentre $\sqrt{\cdot}$ indica la funzione "radice quadrata".
- Altri simboli denotano *relazioni* tra numeri, come il simbolo $<$ che usiamo per indicare l'ordine tra i numeri.
- Il simbolo $=$, che denota l'*uguaglianza*, è anch'esso un simbolo per una relazione tra oggetti, ma il suo significato è fissato ed indipendente dal contesto: esso asserisce che l'oggetto scritto a sinistra del segno di uguale coincide con l'oggetto scritto a destra.

Vedremo che tutte queste tipologie di simboli giocheranno un ruolo fondamentale quando presenteremo la logica del prim'ordine.

Ci sono poi alcune espressioni che ricorrono in ogni testo matematico:

- le particelle "non", "e", "o"
- "se ... allora ..."
- "... se e solo se ..."
- "c'è almeno un x tale che ..."
- "per ogni x ...".

Espressioni di questo genere le abbiamo anche ripetutamente incontrate nella nostra trattazione informale del concetto di dimostrazione (Sezione 1.1).

Per scrivere in modo non ambiguo i ragionamenti e le dimostrazioni introduciamo dei simboli che rappresentano questi costrutti linguistici, ovvero i **connettivi**

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$$

ed i simboli di **quantificatore**

$$\exists \qquad \forall$$

Negazione

I connettivi e i quantificatori si dicono **costanti logiche**. Vediamo il loro significato e alcune delle loro proprietà di base.

$\neg$ denota la **negazione** e serve per affermare l'opposto di quanto asserisce l'affermazione a cui si applica.

Per esempio

$$\neg(x < y)$$

significa che x *non* è minore di y, ovvero che $x \geq y$.

Data un'affermazione P, si ha sempre che P è vera se e solo se $\neg\mathrm{P}$ è falsa, e questo accade se e solo $\neg\neg\mathrm{P}$ è vera. Questo mostra che le espressioni P e $\neg\neg\mathrm{P}$ sono *equivalenti*, ovvero che vale la

Legge della doppia negazione

$$\mathrm{P} \equiv \neg\neg\mathrm{P}.$$

Inoltre

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} \quad \text{se e solo se} \quad \neg\mathrm{P} \equiv \neg\mathrm{Q}.$$

Infatti, in qualunque contesto si ha che se $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$ allora

$$\begin{aligned} \neg\mathrm{P} \text{ è vero} \quad & \text{se e solo se} \quad \mathrm{P} \text{ è falso} \\ & \text{se e solo se} \quad \mathrm{Q} \text{ è falso} \\ & \text{se e solo se} \quad \neg\mathrm{Q} \text{ è vero.} \end{aligned}$$

Similmente si dimostra anche che se $\neg\mathrm{P} \equiv \neg\mathrm{Q}$ allora $\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$.

Congiunzione

$\wedge$ è la **congiunzione** e serve per asserire che due fatti valgono contemporaneamente.

Per esempio

$$(x \text{ è pari}) \wedge (x \text{ è un quadrato perfetto})$$

significa che il numero x è sia pari che un quadrato perfetto (ovvero è il quadrato di qualche numero): poiché abbiamo dimostrato che se k^2 è pari allora anche k lo è, questo vuol dire che $x = (2n)^2 = 4n^2$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Anche le particelle “ma” e “però” sono delle congiunzioni, a cui noi attribuiamo una connotazione avversativa. Tuttavia, in matematica il significato di “P ma Q” o di “P però Q” è lo stesso di “P e Q” e quindi si scrivono comunque come “$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$”.

Il connettivo $\wedge$ è commutativo, poiché asserire $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è come asserire $\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}$, in simboli

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P},$$

ed è associativo, poiché asserire $\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$ è la stessa cosa di asserire $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R}$ (ovvero: P, Q ed R sono tutt'e tre vere), in simboli

$$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R}.$$

È chiaro che in qualunque contesto ci troviamo, se P e Q sono vere allora anche $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ lo è, in simboli

$$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}.$$

Viceversa, se $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è un'affermazione vera, allora lo sono in particolare sia P che Q, in simboli possiamo scrivere che

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \models \mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \models \mathrm{Q}\ .$$

Infine

Se $\mathrm{P} \equiv \mathrm{R}$ e $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{S}$, allora $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$.

Infatti se siamo in un contesto in cui vale $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$, in tale contesto devono necessariamente valere sia P che Q. Dato che $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{S}$, in tale contesto varranno sia R che S, da cui concludiamo che varrà anche $\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$.

Il ragionamento mostra che in ogni contesto in cui vale $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ vale anche $\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$, per cui

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \models \mathrm{R} \wedge \mathrm{S}$$

In maniera simile si dimostra $\mathrm{R} \wedge \mathrm{S} \models \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$, da cui

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R} \wedge \mathrm{S}.$$

Disgiunzione

$\vee$ è la **disgiunzione** (inclusiva) e corrisponde al *vel* latino o all'inglese *or*: questo *o* quello *o* eventualmente entrambi.

In particolare, affermare che vale $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ *non* vuol dire che soltanto una tra P e Q è vera. Se asseriamo ad esempio che

$$(x \text{ è pari}) \vee (x \text{ è un quadrato perfetto})$$

intendiamo dire che il numero x può essere pari (cioè della forma $2n$, per esempio 6), o un quadrato perfetto (cioè della forma n^2, per esempio 9), o magari un numero che è un quadrato perfetto pari (cioè della forma $4n^2$, per esempio 4).

Anche il connettivo $\vee$ è commutativo, poiché $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ ha lo stesso significato di $\mathrm{Q} \vee \mathrm{P}$, in simboli

$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q} \vee \mathrm{P},$$

e associativo, poiché $\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$ ha lo stesso significato di $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R}$ (ovvero: almeno una tra P, Q ed R è vera), in simboli

$$\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R}.$$

Se sappiamo che una certa affermazione P è vera, allora possiamo anche asserire che $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ è vera, qualsiasi sia l'affermazione Q; infatti, $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ è vera quando è vera almeno una delle due affermazioni P e Q, e nel nostro caso P lo è. Viceversa, se Q è vera allora anche $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ lo è, qualunque sia P. Quindi

$$\mathrm{P} \models \mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Q} \models \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}.$$

Invece a partire da $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ non possiamo né concludere P né concludere Q. infatti, se $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ è vera sappiamo solo che almeno una tra P e Q è vera, ma non possiamo sapere quale (in genere dipenderà dal contesto).

Invece, se sappiamo che $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ è vera ma che P è falsa, allora l'unica possibilità è che Q sia vera (se P e Q fossero entrambe false, sarebbe falsa anche $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$). Similmente, se $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ è vera ma Q è falsa, allora possiamo concludere che P deve essere vera. Questa è la

Legge della disgiunzione

$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, \neg \mathrm{P} \models \mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, \neg \mathrm{Q} \models \mathrm{P}.$$

Infine

Se $P \equiv R$ e $Q \equiv S$, allora $P \vee Q \equiv R \vee S$.

Infatti se vale $P \vee Q$, allora certamente almeno una tra P e Q vale. Nel primo caso (P è vera), poiché $P \models R$ e $R \models R \vee S$ si ottiene per composizione che deve valere $R \vee S$. Nel secondo caso (Q è vera), poiché $Q \models S$ e $S \models R \vee S$ si ottiene nuovamente $R \vee S$. Quindi in ogni caso si ha che vale $R \vee S$, ovvero

$$P \vee Q \models R \vee S.$$

Similmente si dimostra

$$R \vee S \models P \vee Q,$$

da cui

$$P \vee Q \equiv R \vee S.$$

Leggi di De Morgan

Combinando quanto visto finora riguardo ai connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, possiamo già fare alcune osservazioni interessanti. Ad esempio, possiamo argomentare che valgono le

Leggi di De Morgan

$$\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad \neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}.$$

Infatti, se sappiamo che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è falsa, allora almeno una tra P e Q deve essere falsa: questo mostra che $\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \models \neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q}$. Viceversa, se sappiamo che almeno una tra P e Q è certamente falsa, allora $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$ è anch'essa falsa: questo dimostra che $\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q} \models \neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})$, da cui $\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q}$.

Lasciamo al lettore il verificare con ragionamenti analoghi che $\neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$.

Negando entrambi i termini dell'equivalenza $\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q}$ si ottiene, sfruttando quanto visto per la $\neg$, che

$$\neg\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \equiv \neg(\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q}),$$

da cui per la legge della doppia negazione

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \equiv \neg(\neg\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{Q}).$$

Questo vuol dire che la congiunzione $\wedge$ può essere "definita" a partire da negazione $\neg$ e disgiunzione $\vee$: ogni affermazione che contenga una congiunzione potrebbe essere riscritta in maniera equivalente utilizzando al suo posto negazioni e disgiunzioni in modo opportuno.

Similmente, partendo da $\neg(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \equiv \neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$ e ragionando come prima si verifica che

$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \equiv \neg(\neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}),$$

ovvero che la disgiunzione $\vee$ può essere "definita" a partire da negazione $\neg$ e congiunzione $\wedge$.

Distributività

Valgono poi la **proprietà distributiva** di $\vee$ su $\wedge$

$$\mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}).$$

e la **proprietà distributiva** di $\wedge$ su $\vee$

$$\mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}).$$

Per la simmetria di $\vee$ e $\wedge$ si avrà anche

$$(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R} \equiv (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \quad \text{e} \quad (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \equiv (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}).$$

La dimostrazione di queste proprietà non è del tutto immediata: per questa ragione verrà posticipata alla Sezione 1.3 dove, utilizzando le tavole di verità, potremo controllarne in modo assai più semplice la validità.

Tautologie

Possiamo poi osservare che l'affermazione

$$\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$$

è sempre vera, qualunque sia P. Infatti, dato un qualunque contesto si ha che in esso o P è vera oppure P è falsa: nel primo caso si ottiene che $\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$ è vera poiché $\mathrm{P} \models \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$, nel secondo caso si ottiene nuovamente che $\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$ è vera poiché $\neg \mathrm{P} \models \mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$.

Affermazioni come $\mathrm{P} \vee \neg \mathrm{P}$, ovvero affermazioni che sono sempre vere, indipendentemente dal contesto, verranno chiamate **tautologie**. In simboli, scriviamo

$$\models \mathrm{Q}$$

per dire che Q è una tautologia.

Contraddizioni

Siccome $\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{P}$ è sempre vera, la sua negazione $\neg(\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{P})$ è sempre falsa. Poiché per le leggi di De Morgan

$$\neg(\mathrm{P} \vee \neg\mathrm{P}) \equiv \neg\mathrm{P} \wedge \neg\neg\mathrm{P}$$

e per la legge della doppia negazione

$$\neg\mathrm{P} \wedge \neg\neg\mathrm{P} \equiv \neg\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}$$

applicando la simmetria di $\wedge$ all'ultima espressione otteniamo che

$$\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{P}$$

è sempre falsa, qualunque sia P.

Affermazioni di questo tipo, ovvero affermazioni che sono sempre false, indipendentemente dal contesto, verranno chiamate **contraddizioni**.

Si può anche osservare che

$$Q \models P \vee \neg P,$$

qualunque siano P e Q. Infatti asserire $Q \models P \vee \neg P$ significa dire che: "*in ogni conteso in cui vale* Q*, vale anche* $P \vee \neg P$". Ma poiché, $P \vee \neg P$ è *sempre* vera, sarà in particolare vera anche nei contesti in cui vale Q. Quindi abbiamo verificato che effettivamente $Q \models P \vee \neg P$. Ovviamente $P \vee \neg P$ potrebbe essere sostituita da qualunque altra tautologia.

Viceversa,

$$P \wedge \neg P \models Q,$$

indipendentemente da P e Q. Infatti, poiché non accade mai che $P \wedge \neg P$ sia vera, allora è vero che "*in ogni contesto in cui vale* $P \wedge \neg P$*, vale anche* Q" (semplicemente non c'è nessun contesto in cui si deve necessariamente verificare Q). Ovviamente $P \wedge \neg P$ potrebbe essere sostituita da qualunque contraddizione. Questo è il cosiddetto principio dell'**ex falso quodlibet**.

Implicazione

$\rightarrow$ è l'**implicazione** e corrisponde all'espressione "se ... allora ...".

Precisare il significato dell'implicazione è piuttosto delicato ed è il primo scoglio in cui ci si imbatte quando si formalizza il ragionamento matematico. Infatti, se sappiamo che è vero che "*Se vale* P *allora vale* Q", allora saremo tutti concordi nel ritenere che in ogni contesto in cui P sia vera, si debba avere che anche Q è vera. Ma cosa dire dei contesti in cui P risulta falsa? Se ad esempio nel nostro contesto sia P che Q sono false, siamo ancora disposti a ritenere la frase "*Se vale* P *allora vale* Q" vera?

Per chiarire la situazione, cominciamo con un esempio. Consideriamo la seguente affermazione riguardante un generico numero reale x.

$$\textit{Se } \underbrace{x > 0}_{\mathrm{P}} \textit{ allora } \underbrace{x = y^2 \textit{ per qualche } y \geq 0}_{\mathrm{Q}}.$$

Tale frase è chiaramente vera in ogni contesto in cui abbia senso valutarla: infatti, per ogni numero reale x se vale P, ovvero $x > 0$, allora basta porre $y = \sqrt{x}$ per avere che anche Q vale. Notiamo che anche nei contesti in cui $x \leq 0$, ovvero quando P è falsa, non possiamo ritenere l'affermazione precedente errata: semplicemente diremmo che in quel caso non c'è nulla da verificare perché l'affermazione impone vincoli solo per gli $x > 0$ (in particolare, è ininfluente se Q sia vera o meno in tale contesto). In altre parole:

L'affermazione "*Se* P *allora* Q" precedente risulterebbe falsa in un dato contesto, ovvero per un dato valore di x, solo se si verificasse che $x > 0$ ("P *vera*") ma x non fosse il quadrato di un numero positivo ("Q *falsa*").

Proviamo ora a considerare quest'altra affermazione riguardante un generico numero reale x.

$$\textit{Se } \underbrace{x > 0}_{\mathrm{P}} \textit{ allora } \underbrace{x^2 > 1}_{\mathrm{Q}}.$$

Anche questa frase è della forma "*Se* P *allora* Q", ma questa volta non saremo disposti a ritenerla vera in generale: più precisamente, noteremo che ci sono alcuni contesti in cui essa vale (ad esempio quando $x > 1$) e contesti in cui essa non vale. Questi ultimi sono esattamente quelli dati dai valori di x per cui accade che $x > 0$ ("P *vera*") ma $x^2 \leq 1$ ("Q *falsa*"), ovvero i contesti in cui $0 < x \leq 1$.

Vediamo un ultimo esempio. La frase della forma $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$

$$\text{Se } \underbrace{\textit{piove}}_{\mathrm{P}} \text{ allora } \underbrace{\textit{in cielo ci sono le nuvole}}_{\mathrm{Q}}.$$

è chiaramente vera in ogni possibile contesto: in ogni possibile situazione, se sta effettivamente piovendo allora certamente ci devono anche essere delle nuvole in cielo da cui la pioggia cade. In altre parole, in qualunque contesto l'implicazione $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ considerata è vera perché o non sta piovendo, oppure se sta piovendo allora necessariamente ci sono delle nuvole in cielo. Viceversa, l'affermazione

$$\text{Se } \underbrace{\textit{in cielo ci sono le nuvole}}_{\mathrm{Q}} \text{ allora } \underbrace{\textit{piove}}_{\mathrm{P}}.$$

è falsa in determinati contesti, ovvero quando accade che ci sia una giornata nuvolosa ("Q *vera*") ma senza pioggia ("P *falsa*"). Quindi l'implicazione $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ non può essere ritenuta vera in generale.

Riassumendo quanto discusso finora, abbiamo quindi che

- L'affermazione $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ è falsa in un dato contesto se e solo se in tale contesto accade che P è vera ma Q è falsa, ovvero se in esso vale $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$.
- Di conseguenza, $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ è vera in un dato contesto se e solo se in tale contesto *non* vale $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$; equivalentemente, se in esso vale $\neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$.

Infatti i nostri ragionamenti evidenziano che

$$\neg(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) \equiv \mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}).$$

Dalla seconda equivalenza, per le leggi di De Morgan e della doppia negazione

$$\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}.$$

In particolare, questo vuol dire che l'implicazione può essere "definita" a partire da negazione e congiunzione, oppure a partire da negazione e disgiunzione.

In accordo con la nostra intuizione, il significato dato all'implicazione cattura quello di conseguenza logica:

$$\mathrm{P} \models \mathrm{Q} \qquad \text{se e solo se} \qquad \models \mathrm{P} \to \mathrm{Q}.$$

Infatti, supponiamo che $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$. Allora in ogni contesto in cui vale P deve valere anche Q: in particolare, in nessun contesto può valere $\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}$, per cui $\models \neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q})$. Poiché $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}) \equiv \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$, abbiamo $\models \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$.

Viceversa, supponiamo che $\models \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$, ovvero che l'implicazione $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ sia vera in qualunque contesto. Supponiamo di trovarci in un contesto in cui vale P, cosicché vale anche $\neg\neg\mathrm{P}$ per la legge della doppia negazione. Siccome $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$, in tale contesto deve valere anche $\neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$. Per la legge della disgiunzione applicata a $\neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$ e $\neg\neg P$, si ha allora che Q vale in tale contesto. Quindi abbiamo verificato che $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$.

Più in generale, ricordiamo che $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$ se in ogni contesto in cui tutte le P_1, ..., P_n sono vere si ha che anche Q è vera. Poiché in ogni contesto si ha che P_1, ..., P_n sono tutte vere se e solo se è vera $\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n$, allora

$$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$

se e solo se

$$\mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \models \mathrm{Q}$$

se e solo se

$$\models \mathrm{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \to \mathrm{Q}.$$

In matematica, si usano anche altre espressioni che sono equivalenti all'implicazione.

- Le espressioni "*affinché valga* P *deve valere* Q" oppure "*affinché valga* P *è necessario che valga* Q" significano che non può accadere che P valga ma Q no. Il loro significato è quindi equivalente a quello di "*se* P *allora* Q" e perciò si scrivono, in simboli, $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$.
- L'espressione "*affinché valga* P *è sufficiente che valga* Q" significa che non appena si sa che Q vale, allora anche P deve valere. Il suo significato è quindi equivalente a quello di "*se* Q *allora* P" e perciò si scrive, in simboli, $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$.

Osservazione

L'implicazione cattura il concetto intuitivo di **conseguenza**. Diciamo che Q è una conseguenza di P se ogni volta che si verifica P allora anche Q si deve verificare, ovvero $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$.

L'implicazione non ha invece nulla a che fare con il concetto di **causalità**. Infatti, si ritiene usualmente che P sia una causa di Q se è una *condicio sine qua non*, ovvero se non può accadere Q senza che si verifichi P. Questo vuol dire che se c'è un nesso di causalità tra P e Q, allora l'unica cosa che possiamo affermare è che $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$; non possiamo invece affermare che $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$, perché non possiamo asserire con certezza che P sia sufficiente, da sola, a causare Q (potrebbero essere necessarie altre concause affinché si verifichi veramente Q).

C'è poi un'ultimo aspetto di cui tener conto. A differenza di quanto accade per i concetti intuitivi di "conseguenza" e "causa", è possibile valutare se è vero che $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ anche quando P e Q sono affermazioni che non hanno nulla a che fare una con l'altra.

Ad esempio se P è l'affermazione

Il ghiaccio ha una temperatura di 100 gradi centigradi.

e Q è l'affermazione

L'Empoli vincerà il campionato di calcio nel 2028.

allora si può comunque ritenere l'implicazione $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ vera (poiché non può certamente verificarsi che P valga ma Q no, essendo che P è sempre falsa), anche se evidentemente non c'è nessuna relazione di "conseguenza" o "causalità" tra P e Q nel senso intuitivo di tali termini.

Il connettivo $\rightarrow$ *non* è affatto commutativo: $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$ hanno significati completamente diversi!

Infatti, se ad esempio Q è vera e P è falsa, allora l'implicazione $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$ risulterà vera, mentre l'implicazione $\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}$ risulterà falsa. Dunque queste due implicazioni *non* sono equivalenti.

Si verifica anche che $\rightarrow$ *non* è associativo, ovvero che $\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})$ e $(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{R}$ *non* sono espressioni equivalenti.

Infatti, se ad esempio sia P che R sono false, allora è facile verificare che $\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R})$ è vera, mentre $(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \rightarrow \mathrm{R}$ è falsa (indipendentemente dal fatto che Q sia vera o meno).

L'implicazione $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ è invece equivalente al suo **contrappositivo** $\neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P}$, in simboli

$$\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P}.$$

Infatti per la legge della doppia negazione e la simmetria di $\vee$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} \to \mathrm{Q} &\equiv \neg\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \\
&\equiv \neg\mathrm{P} \vee \neg\neg\mathrm{Q} \\
&\equiv \neg\neg\mathrm{Q} \vee \neg\mathrm{P} \\
&\equiv \neg\mathrm{Q} \to \neg\mathrm{P}.
\end{aligned}$$

Infine

> Se $\mathrm{P} \equiv \mathrm{R}$ e $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{S}$, allora $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R} \to \mathrm{S}$.

Infatti, utilizzando quanto visto per negazione e disgiunzione si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \to \mathrm{Q} &\equiv \neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \\ &\equiv \neg \mathrm{R} \vee \mathrm{S} \\ &\equiv \mathrm{R} \to \mathrm{S}. \end{aligned}$$

Modus Ponens

Dall'equivalenza $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ si può anche ricavare una delle più famose tra le leggi logiche, ovvero il

Modus Ponens

$$P \to Q, P \models Q.$$

Infatti, se siamo in un contesto in cui vale $P \to Q$, allora vale anche $\neg P \vee Q$. Se inoltre vale anche P, per la legge della doppia negazione vale anche $\neg\neg P$. Applicando la legge della disgiunzione, concludiamo che deve valere Q.

Bi-implicazione

$\leftrightarrow$ è la **bi-implicazione** e corrisponde all'espressione "...se e solo se ...".

Quando asseriamo che "P se e solo se Q" intendiamo dire che "se P allora Q, e se Q allora P". In altre parole, $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ è equivalente ad affermare

$$(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}).$$

In particolare, $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}$ è vera se e solo se in ogni contesto si verifica che o P e Q sono entrambe vere, oppure sono entrambe false.

Spesso in matematica "P *se e solo se* Q" lo si scrive come: "*condizione necessaria e sufficiente affinché valga* P*, è che valga* Q".

Utilizzando la commutatività della congiunzione e il fatto che $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P})$, si ottiene facilmente che la bi-implicazione è commutativa, ovvero

$$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv \mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{P}.$$

Si può anche dimostrare che la bi-implicazione è associativa, ovvero

$$\mathrm{P} \leftrightarrow (\mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{R}) \equiv (\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) \leftrightarrow \mathrm{R}.$$

Tuttavia la verifica di questo fatto è tutt'altro che banale e verrà posticipata alla Sezione 1.3, quando sapremo utilizzare le tavole di verità.

Utilizzando l'equivalenza $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv (\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$ e le leggi viste per la congiunzione si ha che

$$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \models \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \models \mathrm{Q} \to \mathrm{P}.$$

e

$$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}, \mathrm{Q} \to \mathrm{P} \models \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}.$$

Infine, utilizzando le analoghe leggi riguardanti implicazione e congiunzione, si verifica facilmente che

Se $\mathrm{P} \equiv \mathrm{R}$ e $\mathrm{Q} \equiv \mathrm{S}$, allora $\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{S}$.

Osserviamo infine che il bicondizionale cattura il concetto di equivalenza logica, ovvero che

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q} \qquad \text{se e solo se} \qquad \models \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}.$$

Infatti

$$\mathrm{P} \equiv \mathrm{Q}$$

se e solo se

$$\mathrm{P} \models \mathrm{Q} \quad \textit{e} \quad \mathrm{Q} \models \mathrm{P}$$

se e solo se

$$\models \mathrm{P} \to \mathrm{Q} \quad \textit{e} \quad \models \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$$

se e solo se

$$\models (\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) \land (\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$$

se e solo se

$$\models \mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}.$$

Quantificatori

$\exists$ è il **quantificatore esistenziale**.

L'espressione $\exists x \, \mathrm{P}$ si legge: "c'è un x tale che P", ovvero "l'affermazione P vale per qualche x". Essa asserisce che c'è *almeno un* ente (non necessariamente unico!) che gode della proprietà descritta da P.

$\forall$ è il **quantificatore universale**.

L'espressione $\forall x \, \mathrm{P}$ si legge: "per ogni x vale P", ovvero "l'affermazione P vale per tutti gli x". Essa asserisce che *ogni* ente gode della proprietà descritta da P.

Quando scriviamo un'affermazione del tipo $\exists x\,\mathrm{P}$ o $\forall x\,\mathrm{P}$ spesso siamo in una situazione in cui P afferma qualche proprietà che l'elemento x può avere o meno.

Esempio

Se P è l'equazione $x^2 + x = 0$, l'espressione $\exists x\,\mathrm{P}$ dice che l'equazione data ammette una soluzione. Invece $\forall x \mathrm{P}$ dice che ogni numero è soluzione di P.

Se invece P non dice nulla della variabile x, il significato di $\exists x \mathrm{P}$ e di $\forall x \mathrm{P}$ coincide con quello di P.

Esempio

Le espressioni $\exists x \exists y\,\big(y^2 + y = 0\big)$ e $\forall x \exists y\,\big(y^2 + y = 0\big)$ sono entrambe equivalenti a $\exists y\,\big(y^2 + y = 0\big)$: tutte e tre asseriscono che l'equazione $y^2 + y = 0$ ammette una soluzione.

La negazione di espressioni che iniziano con un quantificatore è un altro dei punti che può trarre in inganno se non si presta abbastanza attenzione al significato di ciò che si sta dicendo.

La frase

Non tutti i politici sono onesti.

(che è della forma $\neg\forall x\, \mathrm{P}(x)$, dove $\mathrm{P}(x)$ significa "x *è onesto*"), non vuol dire che

Tutti i politici sono disonesti.

(ovvero $\forall x\, \neg\mathrm{P}(x)$), bensì è equivalente a

Esiste (almeno) un politico disonesto.

(ovvero all'espressione $\exists x\, \neg\mathrm{P}(x)$).

Similmente:

L'affermazione

Non esiste un vaccino pericoloso.

(che è della forma $\neg\exists x\, \mathrm{P}(x)$, dove $\mathrm{P}(x)$ sta per "x *è pericoloso*"), non vuole dire che

Qualche vaccino è sicuro.

(ovvero $\exists x\, \neg\mathrm{P}(x)$), bensì è equivalente a

Tutti i vaccini sono sicuri.

(ovvero all'espressione $\forall x\, \neg\mathrm{P}(x)$).

Più in generale, negare $\forall x\,\mathrm{P}$ significa dire che non tutti gli x godono della proprietà descritta da P, cioè c'è almeno un x per cui si può asserire $\neg\mathrm{P}$. Viceversa, se neghiamo $\exists x\,\mathrm{P}$ allora vuol dire che non si dà il caso che ci sia un x per cui vale P, cioè che per ogni x deve valere $\neg\mathrm{P}$. Quindi

$$\neg\forall x\,\mathrm{P} \equiv \exists x\,\neg\mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad \neg\exists x\mathrm{P} \equiv \forall x\neg\mathrm{P}.$$

Negando entrambi i termini di ciascuna delle equivalenze precedenti e applicando la legge della doppia negazione si ottiene

$$\forall x\,\mathrm{P} \equiv \neg\exists x\,\neg\mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad \exists x\,\mathrm{P} \equiv \neg\forall x\,\neg\mathrm{P}.$$

Questo vuol dire che ciascuno dei due quantificatori $\forall$ e $\exists$ può essere "definito" a partire dall'altro quantificatore e dalla negazione.

Quando scriviamo $\forall x \forall y \mathrm{P}$ intendiamo dire che in qualsiasi modo si scelgano gli elementi x e y vale P, e questo è la stessa cosa che dire $\forall y \forall x \mathrm{P}$.

Analogamente $\exists x \exists y \mathrm{P}$ ha lo stesso significato di $\exists y \exists x \mathrm{P}$. Quindi

$$\exists x \exists y \mathrm{P} \equiv \exists y \exists x \mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad \forall x \forall y \mathrm{P} \equiv \forall y \forall x \mathrm{P}.$$

Bisogna invece stare molto attenti quando si vuole scambiare due quantificatori di diverso tipo...

Supponiamo che valga $\exists x \forall y\, \mathrm{P}$: questo vuol dire che c'è un $\bar{x}$ tale che per ogni y vale P. Quindi è vero che dato un y arbitrario possiamo sempre trovare un x tale che P: basta prendere l'elemento $\bar{x}$ di prima. In altre parole

$$\exists x \forall y\, \mathrm{P} \models \forall y \exists x\, \mathrm{P}.$$

Questa regola non può però essere invertita! Da $\forall y \exists x\, \mathrm{P}$ non possiamo affatto concludere $\exists x \forall y\, \mathrm{P}$: si considerino ad esempio le affermazioni $\forall y \exists x\, (y < x)$ e $\exists x \forall y\, (y < x)$ (nei numeri naturali, la prima è vera ma la seconda è falsa).

Questo vuol dire, in particolare, che le espressioni $\exists x \forall y\, \mathrm{P}$ e $\forall y \exists x\, \mathrm{P}$ *non* sono equivalenti: dalla prima segue la seconda, ma non viceversa.

Il quantificatore esistenziale si può distribuire e raccogliere rispetto alla disgiunzione nel seguente senso: dire che "*c'è un* x *per cui* P *oppure c'è un* x *per cui* Q" è equivalente a dire "*c'è un* x *per cui* P *o* Q", in simboli

$$(\exists x \mathrm{P}) \vee (\exists x \mathrm{Q}) \equiv \exists x \, (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}).$$

Rispetto alla congiunzione, invece, solo una delle due possibili regole è valida: il quantificatore si può distribuire ma non raccogliere. Infatti, se "c'è un x tale che P e Q" allora "c'è un x tale che P, e c'è un x tale che Q", in simboli

$$\exists x \, (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \models (\exists x \mathrm{P}) \wedge (\exists x \mathrm{Q}).$$

Il viceversa però non vale: ad esempio, dal fatto che ci sia un numero naturale pari e ci sia un numero naturale dispari non possiamo concludere che esista un numero naturale che è sia pari che dispari.

Specularmente, il quantificatore universale si distribuisce e raccoglie rispetto alla congiunzione

$$(\forall x \mathrm{P}) \wedge (\forall x \mathrm{Q}) \equiv \forall x \, (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \, ,$$

ma rispetto alla disgiunzione si può raccogliere

$$(\forall x \mathrm{P}) \vee (\forall x \mathrm{Q}) \models \forall x \, (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \, ,$$

ma non distribuire. Ad esempio, è vero che ogni numero naturale è o pari o dispari, ma da questo non si può concludere che tutti i numeri naturali sono pari o tutti i numeri naturali sono dispari.

Questo parallelismo tra il quantificatore esistenziale e la disgiunzione, da un lato, e il quantificatore universale e la congiunzione, dall'altro, non è così sorprendente, visto che i quantificatori possono essere visti come disgiunzioni e congiunzioni generalizzate: infatti, dire che vale $\exists x \mathrm{P}(x)$ in $\mathbb{N}$ equivale ad asserire $\mathrm{P}(0) \vee \mathrm{P}(1) \vee \mathrm{P}(2) \vee \ldots$, mentre dire che vale $\forall x \mathrm{P}(x)$ in $\mathbb{N}$ equivale ad asserire $\mathrm{P}(0) \wedge \mathrm{P}(1) \wedge \mathrm{P}(2) \wedge \ldots$.