Primo Esercizio - Definizioni

Francesco Gallà, francesco.galla@edu.unito.it

May 3, 2018

1 Definizioni

1.1 Numeri Naturali

L'insieme dei numeri naturali è composto da tutti i numeri interi maggiori o uguali di 0.
L'insieme è indicato da $\mathbb{N}$

1.2 Numeri Interi

L'insieme dei numeri interi è composto da tutti i numeri i quali possono essere scritti senza una componente frazionaria. Comprendono i numeri naturali e gli interi negativi.
L'insieme è indicato da $\mathbb{Z}$

1.3 Numeri Reali

L'insieme dei numeri reali è composto da tutti i numeri capaci di rappresentare una quantità sulla linea dei Reali (una linea infinita in direzione positiva e negativa, in cui i numeri interi sono equidistanti). Comprendono i numeri Interi, i numeri Razionali e i numeri Irrazionali.
L'insieme è indicato da $\mathbb{R}$

1.4 Intersezione

L'intersezione di due insiemi A e B è l'insieme che contiene gli elementi comuni ad A e a B.
$A \cap B = \{x : x \in A \, and \, x \in B\}$

1.5 Unione

L'unione di due insiemi A e B è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A e B.
$A \cup B = \{x : x \in A \, or \, x \in B\}$

1.6 Differenza

La differenza tra l'insieme A e l'insieme B è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A che non sono presenti in B.
$A - B = \{x : x \in A \, or \, x \notin B\}$

1.7 Power Set

Il Power Set dell'insieme S, o insieme di potenza di S, è l'insieme che contiene tutti i sottoinsiemi di S, compresi l'insieme vuoto e S stesso. L'insieme è indicato da $\wp(S)$
Se la cardinalità del set S è $|S|$, allora la cardinalità di $\wp(S)$ è $2^{|S|}$

1.8 Complemento

L'insieme complemento di A è l'insieme che contiene gli elementi non presenti in A in un insieme universo U che contiene tutti gli elementi considerati.
$\overline{A} = \{x \in U | \, x \notin A\}$

1.9 Contenuto

Un insieme A è contenuto in B se A è un sottoinsieme di B, ovvero se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B. Questo implica che B sia un sovrainsieme di A.
$A \subseteq B \rightarrow \{\forall x \in A | x \in B\}$

1.10 Strettamente Contenuto

Un insieme A è strettamente contenuto in B se A è un sottoinsieme di B, ovvero se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B, e se esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A (pertanto $A \neq B$).
$A \subset B \rightarrow \{(\forall x \in A | x \in B \,) \, and \, (\exists x \, | x \in B \, and \, x \notin A)\}$

1.11 Prodotto Cartesiano

Il prodotto cartesiano tra due o più insiemi (si consideri A e B) è un insieme contenente tutte le coppie ordinate (a, b) in cui a appartiene ad A e b appartiene a B.
$A \times B = \{(a, b) \, | \, a \in A \, and \, b \in B\}$

1.12 Relazione di arietà n

Si definisce arietà di una relazione $\mathbb{D}$ il numero di insiemi a cui si applica quella relazione. Se una relazione ha arietà n:
$\mathbb{D} \subseteq A_1 \times \, ... \, \times A_n$

1.13 Relazione binaria

Una relazione binaria è una relazione $\mathbb{D}$ di arietà 2.
$\mathbb{D} \subseteq A_1 \times A_2$

1.14 Proprietà riflessiva

Dato un insieme A e una relazione $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ soddisfa la proprietà riflessiva se e solo se $\forall a \in A \,:\, a\mathbb{D}a$, ovvero se ogni elemento del set A è relativo a se stesso in $\mathbb{D}$.

1.15 Proprietà simmetrica

Una relazione binaria $\mathbb{D}$ su un set A è simmetrica se è vero per tutte le coppie a, b in A che a è relativo a b solo se b è relativo ad a.
$\forall a, b \in A \,:\, a\mathbb{D}b \Leftrightarrow b\mathbb{D}a$

1.16 Proprietà transitiva

Una relazione binaria $\mathbb{D}$ su un set A è transitiva se ogni volta che un elemento a è relativo ad un elemento b e b è relativo ad un elemento c, allora:
$\forall a, b, c \in A \,:\, a\mathbb{D}b \; and \; b\mathbb{D}c \Leftrightarrow a\mathbb{D}c$

1.17 Relazione di Equivalenza

Una relazione binaria che è allo stesso tempo riflessiva, simmetrica e transitiva è detta equivalente.
La notazione su due elementi a, b di un set è $a \sim b$.

1.18 Chiusura transitiva

La chiusura transitiva di una relazione $\mathbb{D}$ è un'altra relazione $\mathbb{D}^+$ che rappresenta la più piccola relazione transitiva tale che $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}^+$.

2 Funzioni

2.1 Definizione

Una funzione è una relazione tra un set di input e un set di output, con la proprietà che ogni input è relativo ad un solo output.
Una funzione è comunemente indicata dal suo dominio di partenza X e dal suo codominio Y:
$f \,:\, X \rightarrow Y$

2.2 Funzione di arietà n

Una funzione di arietà n (o n-aria) e definita su un set S è così indicata:
$f \,:\, S^n \rightarrow S$

2.3 Funzione Iniettiva

Una funzione è detta iniettiva se mappa sempre un elemento del suo dominio ad uno ed un solo elemento del suo codominio.
Se f è una funzione di dominio S:
$\forall a, b \in S \, : \, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

2.4 Funzione Suriettiva

Una funzione $f \, : \, X \to Y$ è detta suriettiva se:
$\forall y \in Y \, : \, \exists x \in X \mid f(x) = y$

2.5 Funzione Biiettiva

Una funzione è detta biiettiva se è allo stesso tempo iniettiva e suriettiva.

3 Stringhe e Linguaggi

3.1 Alfabeto

Un alfabeto è un insieme (detto anche *base set*) i cui membri sono simboli, che possono includere lettere, caratteri e numeri.
Se L è un linguaggio formale, ossia un set finito o infinito di stringhe di finita lunghezza, allora l'alfabeto di L, indicato con Σ, è l'insieme di tutti i simboli che possono comparire in una qualunque stringa di L.

3.2 Lettere e stringhe

Una stringa è una sequenza finita di membri (simboli) di un alfabeto Σ. Una lettera è un simbolo.

3.3 Stringa vuota

La stringa vuota ε è un caso particolare di stringa di lunghezza 0.

3.4 Concatenazione

La concatenazione di stringhe è l'operazione di unire le stringhe una a seguito dell'altra.
La concatenazione si indica con il simbolo +:
$"Hello" \, + \, "World" \, = \, "HelloWorld"$

3.5 Ripetizione

La ripetizione di stringhe è l'operazione di concatenare la stessa stringa S un numero n di volte.

La ripetizione si indica con il simbolo $*$:
$"Hello" * 2 = "HelloHello"$

3.6 Prefisso e Suffisso

Un prefisso di una stringa S è una sottostringa di S che si presenta all'inizio di S.
Se $S = s_1 ... s_n$ allora il suo prefisso è $\hat{S} = s_1 ... s_m$ con $m \leq n$.
Un suffisso di una stringa S è una sottostringa di S che si presenta alla fine di S.

4 Grafi

4.1 Definizione

Un grafo è una struttura matematica che rappresenta un insieme di oggetti (vertici) in cui alcune coppie di essi sono connesse da archi.
Un grafo è quindi una coppia ordinata $G = (V, E)$ che comprende un insieme V di vertici e un insieme E di archi, che sono associati a V come subset di due elementi di V.

4.2 Diretti / indiretti

Un grafo indiretto (o semplice) è un grafo in cui gli archi non hanno orientamento, pertanto considerando due archi $(x, y), (y, x)$ dove $x, y \in V$:
L'arco (x, y) è identico all'arco (y, x).
Questo significa che gli archi sono coppie non ordinate di vertici. In un grafo con n vertici e senza cicli possiamo dire che il numero massimo di archi è $\frac{n*(n-1)}{2}$

Un grafo diretto è un grafo in cui gli archi hanno orientamento. Gli archi sono rappresentati come frecce che collegano un vertice ad un altro. Essendo in questo caso E un insieme di coppie ordinate, possiamo dire che:
Un arco (x, y) è considerato diretto da x a y.

4.3 Bipartiti

Un grafo bipartito è un grafo in cui l'insieme V di vertici può essere diviso in due insiemi disgiunti e indipendenti W e X, di modo che ogni arco connetta un vertice in W con un vertice in X.
Si indica con $G = (W, X, E)$ dove $V = W \cup X \, and \, W \cap X = \emptyset$

4.4 Nodi sorgente e destinazione

In un grafo diretto, è possibile definire nodi sorgente e nodi destinazione. I nodi sorgente sono quelli per cui il numero di archi in input è 0, mentre i nodi destinazione sono quelli per cui il numero di archi in output è0.

Per cui, se $v \in V$ è un nodo sorgente, il suo indegree sarà 0:
$deg^{-}(v) = 0$
Per cui, se $v \in V$ è un nodo destinazione, il suo outdegree sarà 0:
$deg^{+}(v) = 0$

4.5 Funzione di etichettatura per archi e nodi

In un generico grafo G, è possibile definire funzioni di etichettatura (o di colorazione) dei nodi. Definendo un insieme di etichette S e l'insieme dei vertici V, si definisce:
$f : V \to S$

4.6 Cammini e lunghezza dei cammini

Un cammino in un grafo è una sequenza finita o infinita di archi che collegano una sequenza di vertici distinti l'uno dall'altro. Un cammino di lunghezza k è rappresentato da una sequenza alternata di k vertici ed archi.
$v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$

4.7 Cicli

Un ciclo è un cammino, inteso come sequenza di vertici ed archi, in cui nessun vertice si ripete eccetto il primo (che è anche l'ultimo). Un ciclo di lunghezza n è detto $n - ciclo$.
Si nota che i sottoinsiemi di V, E che formano il ciclo all'interno del grafo $G = (V, E)$ a loro volta identificano un grafo ciclico.

4.8 Grafi fortemente connessi / componenti fortemente connesse terminali

Un grafo diretto è detto fortemente connesso se ogni vertice è raggiungibile da ogni altro vertice.
La relazione binaria di essere fortemente connessi è una relazione di equivalenza, e i sottografi indotti dalle classi di equivalenza sono detti componenti fortemente connesse.
Le componenti fortemente connesse sono dette terminali se non raggiungono nessun'altra componente a parte se stesse.

4.9 BSCC - Bottom Strongly Connected Component

Una BSCC è una componente fortemente connessa da cui nessun vertice al di fuori della BSCC è raggiungibile.

4.10 Albero

Un albero è un grafo indiretto in cui ogni coppia di vertici è connessa da solo un arco. Per questo, ogni grafo indiretto, connesso e aciclico è un albero.

4.11 In/out degree di un nodo

L'indegree di un nodo è il numero di archi entranti nel nodo, mentre l'outdegree è il numero di archi uscenti dal nodo. Sia $G = (V, E)$ e $v \in V$:
$indegree\, di\, v = deg^{-}(v)$
$outdegree\, di\, v = deg^{+}(v)$

5 Matrici

5.1 Definizione

In matematica, una matrice è un vettore bidimensionale di numeri o altri oggetti matematici per i quali sono definite addizione e moltiplicazione. Gli oggetti sono disposti in righe e colonne. Una matrice ha una dimensione indicata dal numero di righe e il numero di colonne.
Una matrice A caratterizzata da n righe e m colonne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

5.2 Somma di matrici

La somma di matrici è definita come addizione degli elementi corrispondenti di due matrici A, B, che pertanto devono essere compatibili, ovvero $row(A) = row(B)\, and\, col(A) = col(B)$.
La matrice risultante $C = A + B$ avra' quindi lo stesso numero di righe e colonne delle due matrici sommate.
Considerando due matrici A,B con n righe ed m colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & & & \\ \dots & & & & \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & & & \end{bmatrix}$$

5.3 Prodotto di matrici

Considerando una matrice A di dimensioni $n \times m$ e una matrice B di dimensioni $m \times p$, il loro prodotto AB è definito come una matrice di dimensioni $n \times p$, in cui le m componenti sulla riga di A sono moltiplicate con le m componenti sulla riga di B.
Pertanto, considerando la matrice $C = A \times B$, ogni componente c_{ij} di C sarà:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \, [\forall i \in 1 \ldots n \, and \, \forall j \in 1 \ldots p]$$

5.4 Prodotto vettore per matrice

Dato che possiamo definire un vettore come una matrice in cui una delle dimensioni è 1, possiamo anche definire il prodotto tra una matrice A e un vettore x.
Il prodotto tra matrice e vettore è definito solo nel caso in cui $col(A) = rows(x)$, per cui dobbiamo utilizzare il vettore come se fosse una matrice colonna, ossia una matrice in cui il numero di colonne è 1.
Per calcolare il prodotto tra A e x possiamo considerare lo stesso procedimento definito per il prodotto tra una matrice A e una generica matrice B. Otteniamo quindi di dover calcolare il prodotto scalare di x con ognuna delle righe di A.
Il risultato di una moltiplicazione tra una matrice A di dimensioni $n \times m$ e un vettore x di dimensioni $m \times 1$ è un vettore colonna di dimesioni $n \times 1$.