Esercizi vari di Logica Matematica

(tratti da esami degli anni precedenti)

Anno accademico 2019-20

1 Insiemi, relazioni, funzioni e cardinalità

Esercizio 1
Disegnare il diagramma di Hasse dei seguenti reticoli (dove l'ordine è dato dalla relazione di divisibilità):

- reticolo dei divisori di 20;
- reticolo dei divisori di 105.

Esercizio 2
Giustificando la propria risposta, dire per ciascuna delle seguenti funzioni se è iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuna delle tre.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3x + 4.$
- $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3x + 4.$
- $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2 \cdot |x|$
- $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 0}, \qquad x \mapsto -2 \cdot |x|$

dove $|x|$ indica il valore assoluto di x e $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$.

Esercizio 3
Sia
$$\mathrm{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ è finito}\}$$
e si ricordi che $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali. Dimostrare che
$$|\mathrm{Fin}| = |\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}|.$$

Esercizio 4
Si consideri l'insieme
$$D = \left\{w \in \{a, b\}^{<\mathbb{N}} \mid a \text{ e } b \text{ compaiono in } w \text{ lo stesso numero di volte}\right\}.$$
Dimostrare che D è numerabile.

Esercizio 5
Dimostrare che l'insieme

$$D = \left\{ s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N}\, (s(2k) = s(2k+1)) \right\}$$

è in biezione con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. È vero che D è numerabile?

Esercizio 6
Dimostrare $D = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ è in biezione con $\mathbb{N}$.

Esercizio 7
Sia $L = \{f, a\}$ un linguaggio del prim'ordine costituito dal simbolo di funzione unario f e dal simbolo di costante a. Sia Term l'insieme di tutti i termini nel linguaggio L. Dimostrare che l'insieme

$$A = \{t \in \mathrm{Term} \mid t \text{ non contiene variabili}\}$$

è un insieme numerabile, ovvero $|A| = |\mathbb{N}|$.

Suggerimento: Osservare che $a \in A$ e che se $t \in A$ allora $f(t) \in A$.

Esercizio 8
Dimostrare che

$$|A| = |B|$$

dove

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un quadrato perfetto}\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{1}{p+1} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

2 Principio di induzione

Esercizio 1
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la relazione

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+3) = n^2 + 4n + 3.$$

Esercizio 2
Definiamo la successione dei c_n per ricorsione su $n \in \mathbb{N}$ come segue:

$$c_0 = 2$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{c_n}.$$

Dimostrare che per ogni $n \geq 0$

$$1/2 \leq c_n \leq 2.$$

Esercizio 3
Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot a_n$$

Dimostrare che per ogni $n > 0$

$$0 < a_n < 1.$$

Suggerimento: Per il passo induttivo, osservare innanzitutto che se $0 < r < 1$ allora anche $0 < \frac{1}{2} \cdot r < 1$ e $0 < 1 - r < 1$.

Esercizio 4
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

Esercizio 5
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

Esercizio 6
Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Esercizio 7
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Esercizio 8
Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{i=1}^{n} m = m \cdot n$$
ricordando che per convenzione $\sum_{i=1}^{0} m = 0$.

Esercizio 9
Dato un linguaggio del prim'ordine L con un simbolo funzionale binario f ed un simbolo di costante a, dimostrare per induzione che per ogni $n > 0$ esiste un L-termine che contiene $2n$ occorrenze del simbolo a.

Esercizio 10
Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

Esercizio 11
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono esattamente 2^n stringhe di lunghezza n sull'alfabeto $A = \{0, 1\}$.

Esercizio 12
Dimostrare per induzione che se n è dispari e $a_1, \ldots, a_n$ sono dispari, allora $\sum_{i=1}^{n} a_i$ è dispari.

Esercizio 13
Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1}^{n} (4k+1) = n(2n+3)$.

Esercizio 14
Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

Esercizio 15
Dimostrare per induzione che se $n \geq 1$ allora
$$\prod_{i=1}^{n} (4i-2) = \frac{(2n)!}{n!},$$
dove $\prod_{i=1}^{n} (4i-2) = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)$.

Esercizio 16
Data la definizione ricorsiva

$$f(0) = 0$$
$$f(n+1) = 1 - f(n)$$

dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \in \{0, 1\}.$$

Esercizio 17
Dato un alfabeto A, dimostrare per induzione che per ogni coppia di stringhe $s, t \in A^*$, la lunghezza della concatenazione di s con t è la somma delle lunghezze di s e di t, in simboli:

$$\mathrm{lh}(st) = \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$$

Esercizio 18
Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

Esercizio 19
Dimostrare per induzione che esistono $n!$ permutazioni di un insieme con n elementi, dove $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Suggerimento. Si osservi che una permutazione di un insieme di $n+1$ elementi è determinata dalla scelta di un elemento dell'insieme con una permutazione dei restanti n elementi.

Esercizio 20
Si dimostri per induzione strutturale che il numero di parentesi in una formula è sempre pari.

Esercizio 21
Dimostrare per induzione su n che la funzione f definita ricorsivamente dalle clausole

$$f(0) = 0$$
$$f(n+1) = 1 - f(n)$$

soddisfa le condizioni seguenti, per ogni numero naturale n:

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 \qquad \text{se } n \text{ è pari} \\ f(n) &= 1 \qquad \text{se } n \text{ è dispari} \end{aligned}$$

Esercizio 22
Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita per ricorsione dalle clausole

$$f(0) = 0$$
$$f(n+1) = f(n) + 2n - 1.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(n) = n^2 - 2n.$$

Esercizio 23
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n}(2i-3) = n^2 - 2n - 3.$$

Esercizio 24
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n}(4i+4) = (n+1)(2n+4).$$

Esercizio 25
Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita per ricorsione da

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 8. \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = (n+1)(2n+4).$$

Esercizio 26
Siano a e b due numeri naturali. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la disuguaglianza

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n.$$

3 Logica proposizionale

Esercizio 1
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad \neg \mathrm{A} \to \neg \mathrm{B} \\ \mathrm{Q}: &\quad \neg \mathrm{B} \to \neg \mathrm{A} \\ \mathrm{R}: &\quad \neg \mathrm{A} \land \neg \mathrm{B} \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$;
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$;
3. $\mathrm{P} \land \mathrm{R} \equiv \mathrm{Q}$.

Esercizio 2
Sia P la proposizione

$$\mathrm{A} \land (\mathrm{B} \to \mathrm{A}).$$

Giustificando le proprie risposte, dire quale delle seguenti proposizioni sono conseguenza logica di P:

1. $\mathrm{A} \leftrightarrow \neg \mathrm{A}$
2. $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \lor (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$
3. $\neg \mathrm{B} \to \mathrm{A}$

Esercizio 3
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0: &\quad A \land \neg B \\ \mathrm{P}_1: &\quad B \lor \neg C \\ \mathrm{P}_2: &\quad A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C) \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_2$;
2. $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \models \mathrm{P}_0$;
3. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_2 \models \mathrm{P}_1$.

Esercizio 4
Sia P la proposizione $\neg(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \lor \neg \mathrm{B}$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg \mathrm{B}$
2. $\mathrm{A} \lor \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A} \land \neg \mathrm{B}$
4. $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$

Esercizio 5
Sia P la proposizione $\neg(A \to B) \vee \neg B$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg B$
2. $A \vee B$
3. $A \wedge \neg B$
4. $A \to B$

Esercizio 6
Sia P la proposizione $\neg(A \to B) \vee B$. Giustificando la propria risposta, determinare quali delle seguenti sono conseguenza logica di P:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $A \to B$

Esercizio 7
Sia P la proposizione $\neg(B \to A) \vee (B \vee A)$. Giustificando la propria risposta, verificare quali delle seguenti proposizioni sono logicamente equivalenti a P, quali sono conseguenza logica di P, quali non sono né l'una né l'altra:

1. $B \to A$
2. $\neg B \to A$
3. B
4. $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

Esercizio 8
Giustificando la propria risposta, determinare se è vero che

$$\neg B \vee A\,,\ \neg(C \wedge A) \models C \to \neg B.$$

Esercizio 9

1. Dimostrare mediante tavole di verità che vale la seguente relazione:

$$\neg A \vee \neg B, B \wedge \neg C \models \neg A \to \neg C$$

2. Dimostrare mediante tavole di verità:

$$A \to B, C \to B, \neg B \not\models A \vee C$$

Esercizio 10

1. Indicare, se esiste, una valutazione delle lettere proposizionali A, B, C che dimostri che $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$ non è conseguenza logica di $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$, motivando la scelta.

2. Si consideri la proposizione “Solo gli studenti che prendono almeno 18 allo scritto possono essere ammessi all’orale”: quale dei seguenti casi esclude?
(1) Alice ha preso 18 allo scritto ma non è ammessa all’orale;
(2) Bice ha preso 18 allo scritto ed è ammessa all’orale;
(3) Carlo ha preso 17 allo scritto ed è ammesso all’orale;
(4) Davide ha preso 17 allo scritto e non è ammesso all’orale.

Esercizio 11
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: &\quad \mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ \mathrm{Q}: &\quad \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ \mathrm{R}: &\quad \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$;
2. $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \models \mathrm{P}$;
3. $\mathrm{P}, \mathrm{R} \models \mathrm{Q}$.

Esercizio 12
Data la formula proposizionale

$$(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C})$$

indicare quali delle seguenti formule ne sono conseguenze logiche:

1. A
2. B
3. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$
4. $\neg\mathrm{A} \vee (\neg\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C})$

Esercizio 13
Data la seguente formula proposizionale P

$$(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{C}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{C}),$$

quali delle seguenti formule **non** sono conseguenze logiche di P?

1. $(\mathrm{C} \to \mathrm{B}) \to \neg\mathrm{A}$
2. $\mathrm{A} \vee \mathrm{C}$
3. $\neg\mathrm{C}$
4. $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{C}$

Esercizio 14
Indicare per ciascuna delle seguenti righe se vale la relazione di conseguenza logica indicata, motivando la risposta con la corrispondente tavola di verità:

1. $\neg A \vee \neg B \models \neg A \to \neg B$
2. $A \to B \models A \vee B$
3. $\neg B \to \neg A \models \neg A \vee B$
4. $\neg A \wedge \neg B \models \neg A \to \neg B$

Esercizio 15
Verificare se la seguente affermazione è valida o meno:

$$P \vee Q, (R \wedge P) \to Q, \neg R \not\models P$$

Esercizio 16
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{array}{ll} P_0: & B \wedge \neg A \\ P_1: & C \vee \neg B \\ P_2: & C \leftrightarrow (\neg A \wedge B) \end{array}$$

Determinare se:

1. $P_0 \models P_2 \vee P_1$;
2. $P_1 \models P_0 \wedge P_2$;
3. $P_0, P_1 \models P_2$.

Esercizio 17
Usare il calcolo proposizionale per risolvere il seguente problema:

> Alessandro, Beatrice e Carlo vanno al ristorante. Se Alessandro ordina una pizza altrettanto fa Beatrice; Beatrice o Carlo, ma non entrambi, ordinano una pizza; Alessandro o Carlo, o entrambi, ordinano una pizza. Se Carlo ordina una pizza, altrettanto fa Alessandro. Chi ordina una pizza?

Esercizio 18
Siano date le formule

$$\begin{array}{ll} P: & A \vee B \vee C \\ Q: & \neg A \to B \\ R: & \neg C \to A \end{array}$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1. $Q \models P$
2. $R \models P$
3. $R \vee Q \equiv P$

Esercizio 19
Siano date le formule

$$\begin{aligned} P &: \quad (A \wedge \neg B) \to \neg C \\ Q &: \quad \neg B \to A \\ R &: \quad \neg B \to \neg C \end{aligned}$$

Giustificando le proprie risposte, verificare se:

1. $P, Q \models R$
2. $R, P \models Q$
3. $P \wedge Q \equiv R$

Esercizio 20
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} Q_0 &: \quad \neg A \to C \\ Q_1 &: \quad \neg A \to \neg B \\ Q_2 &: \quad (B \vee \neg C) \to A \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $Q_0, Q_1 \models Q_2$;
2. $Q_2 \models Q_0 \wedge Q_1$;
3. $Q_0 \vee Q_1 \equiv Q_2$.

Esercizio 21
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} S_0 &: \quad \neg C \leftrightarrow A \\ S_1 &: \quad \neg A \leftrightarrow B \\ S_2 &: \quad B \to (A \vee C) \end{aligned}$$

Determinare se:

1. $S_0, S_1 \models S_2$;
2. $S_2 \models S_0 \wedge S_1$;
3. $S_2 \equiv S_1 \vee S_0$.

Esercizio 22
Consideriamo le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} Q_0 &: \quad (\neg C \wedge A) \vee (C \wedge \neg A) \\ Q_1 &: \quad (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \\ Q_2 &: \quad \neg B \vee A \vee C \end{aligned}$$

Giustificando le proprie risposte, determinare se:

1. $Q_0, Q_1 \models Q_2$;
2. $Q_2 \models Q_0 \wedge Q_1$;
3. $Q_2 \equiv Q_1 \vee Q_0$.

4 Logica del prim'ordine: semantica

Esercizio 1
Sia $L = \{R, f\}$, dove R simbolo di relazione binario e f simbolo di funzione binario. Sia φ la seguente formula
$$\forall x \exists y R(f(x, y), z).$$

1. Sottolineare (nel caso in cui ve ne siano) ciascuna occorrenza libera di variabile in φ.
2. Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi[x/2, y/5, z/0]$ dove $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, + \rangle$.
3. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ si ha che $\mathcal{B} \models \varphi[x/2, y/5, z/k]$ dove $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, \geq, \cdot \rangle$.

Giustificare le proprie risposte.

Suggerimento. Nel terzo punto distinguere i casi $k \leq 0$ e $k > 0$.

Esercizio 2
Sia $L = \{f\}$ un linguaggio costituito da un unico simbolo di funzione binario. Sia φ la formula
$$\forall y \forall z (f(y, z) = x \to y = x \vee z = x).$$

1. Determinare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle \models \varphi[x/n]$.
2. Determinare tutti gli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\langle \mathbb{N}, + \rangle \models \varphi[x/n]$.
3. Dimostrare che $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle \not\models \varphi[x/3]$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 3
Sia $L = \{f, g, c\}$, dove f e g sono simboli di funzione binari e c è un simbolo di costante. Sia φ la formula
$$\forall x \forall y (f(g(x, x), c) = f(c, g(y, y)) \to x = y).$$

1. Dimostrare che $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle \models \varphi$.
2. Dimostrare che $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle \not\models \varphi$.

Esercizio 4
Sia φ la formula
$$\exists x \forall y R(x, y)$$
e ψ la formula
$$\forall y \exists x R(x, y)$$
dimostrare che $\psi \not\models \varphi$.

Esercizio 5
Sia $L = \{R, f, a, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e due simboli di costante a e c. Sia φ l'enunciato
$$\forall x \, (\exists y R(y, f(x, y)) \to \exists z \, (R(a, z) \wedge R(z, x)))$$

e sia ψ l'enunciato

$$\forall x \forall z(\neg(z = x) \wedge \neg(z = f(x, c)) \rightarrow R(z, x) \vee R(f(x, c), z))$$

Per ciascuna delle seguenti L-strutture, determinare se gli enunciati φ e ψ sono veri in esse oppure no.

- $\mathcal{Q} = \langle \mathbb{Q}, <, +, 0, 1 \rangle$
- $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, 0, 1 \rangle$

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 6
Sia $L = \{f, g\}$ un linguaggio del prim'ordine, dove f e g sono entrambi simboli di funzione binari. Sia $\varphi(x)$ la formula

$$f(x, x) = g(x, x).$$

Consideriamo le due L-strutture seguenti:

- $\mathcal{R}_0 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
- $\mathcal{R}_1 = \langle \mathbb{R}, +, - \rangle$

Giustificando la propria risposta, determinare tutti gli $r \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\mathcal{R}_0 \models \varphi[x/r]$$

e tutti gli $r \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$\mathcal{R}_1 \models \varphi[x/r].$$

Esercizio 7
Sia $L = \{R, f, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di funzione binario f e un simbolo di costante c. Sia φ la formula

$$\forall x\, (\neg \exists y\, (f(y, y) = x) \rightarrow R(f(z, c), x)).$$

Consideriamo la L-struttura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 1 \rangle$.

1. Dire se φ è un enunciato oppure no, e nel secondo caso cerchiare le occorrenze libere di variabili.
2. È vero che $\mathcal{N} \models \varphi[x/0, y/0, z/0]$?
3. Trovare un'assegnazione $x/n, y/m, z/k$ tale che $\mathcal{N} \not\models \varphi[x/n, y/m, z/k]$.
4. Determinare se è vero che $\mathcal{N} \models \forall z \varphi$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 8
Sia $L = \{R, P, c\}$ un linguaggio del prim'ordine contenente un simbolo di relazione binario R, un simbolo di relazione unario P, e un simbolo di costante c. Sia φ l'enunciato

$$\exists y\, P(y) \wedge \forall x\, (P(x) \rightarrow R(c, x))$$

e sia ψ l'enunciato

$$\forall x\, R(c, x))$$

Dimostrare che

$$\varphi \not\models \psi.$$

Esercizio 9
Trovare l'insieme di verità in $\langle \mathbb{N}, |, 1\rangle$ (dove i simboli $|$ e 1 sono interpretati nella maniera naturale) della seguente formula:

$$\exists y\,(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x)\,.$$

Esercizio 10
Dimostrare che il seguente enunciato non è logicamente valido

$$\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \to \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

costruendo una opportuna struttura in cui l'enunciato risulti falso.

Esercizio 11
Dimostrare che la formula $\forall x(C(x) \to S(x))$ non è conseguenza logica delle formule

$$\forall x(R(x) \to S(x)), \forall x(R(x) \to C(x)).$$

Esercizio 12
Trovare l'insieme di verità in $\mathbb{N}$ della seguente formula:

$$\exists y\,(y \mid x \wedge P(y) \wedge \forall z(z \mid x \wedge P(z) \to z = y),)$$

dove $|$ denota la relazione di divisibilità e P il predicato per essere un numero primo.

Esercizio 13
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario P. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone e $a\ P^{\mathcal{A}}\ b$ se e solo se a è genitore di b. Trovare una formula $\varphi(x)$ il cui insieme di verità in $\mathcal{A}$ è l'insieme delle persone che sono zio/zia di qualcuno.

Esercizio 14
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo funzionale binario $\cdot$. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui universo è l'insieme $\mathbb{N}$ e in cui $\cdot^{\mathcal{A}}$ è la moltiplicazione. Trovare una formula $\varphi(x, y)$ il cui insieme di verità in $\mathcal{A}$ è la relazione che vale tra x e y quando hanno un divisore in comune.

Esercizio 15
Dimostrare, costruendo una opportuna struttura, che

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))\,, \exists x\,(R(x) \wedge \neg Q(x)) \not\models \exists x\,(R(x) \wedge P(x))$$

per un linguaggio del prim'ordine con simboli predicativi unari P, Q, R.

Esercizio 16
Dimostrare che

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))\,, \exists x\,(Q(x) \wedge R(x)) \not\models \forall x(P(x) \to R(x))$$

Esercizio 17
Sia $L = \{R\}$ un linguaggio costituito da un unico simbolo di relazione binario. Si considerino le L-strutture

- $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, dove $|$ è la relazione di divisibilità tra numeri naturali;
- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{Z}, \geq \rangle$.

Stabilire quali tra le precedenti L-strutture è un modello dell'enunciato

$$\exists x \exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x)).$$

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 18
Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario. Consideriamo la L-struttura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle,$$

dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità. Sia $\varphi(x)$ la L-formula

$$\neg \forall y P(x, y) \wedge \forall z (P(z, x) \wedge \neg (z = x) \to \forall y P(z, y)).$$

1. Quali delle tre affermazioni seguenti sono corrette?

$$\mathcal{A} \models \varphi(x)[x/1] \qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/3] \qquad \mathcal{A} \models \varphi(x)[x/4]$$

2. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ in $\mathcal{A}$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 19
Sia $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Sia $\varphi(x)$ la L-formula

$$\exists y \, (f(y, y) = x).$$

1. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ nella L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$.
2. Determinare l'insieme di verità di $\varphi(x)$ nella L-struttura $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
3. Sia $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. È vero che $\mathcal{C} \models \forall x \, \varphi(x)$?

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 20
Sia $L = \{f, a\}$ con f simbolo di funzione unario e a simbolo di costante. Sia φ l'enunciato

$$\forall x (\neg (x = a) \to \exists y (f(y) = x)).$$

Giustificando le proprie risposte, determinare quali delle seguenti L-strutture soddisfano φ.

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{A}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita da $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$;
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Q}, f^{\mathcal{B}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{B}} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ è definita da $f^{\mathcal{B}}(q) = q + 1$;
3. $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{C}}, 0 \rangle$, dove $f^{\mathcal{C}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f^{\mathcal{C}}(z) = 2z$;

Esercizio 21
Sia $L = \{P, R, a\}$ con P ed R simboli di relazione binaria e a simbolo di costante. Consideriamo la L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, |, 2\rangle$, dove $|$ è l'usuale relazione di divisibilità.

Siano φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \, (P(x,y) \land R(a,y))$$

e ψ l'enunciato

$$\exists x \forall y \, (P(x,y) \to R(a,y))$$

1. Determinare se $\mathcal{A} \models \varphi$.
2. Determinare se $\mathcal{A} \models \psi$.
3. Determinare se $\varphi \models \psi$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 22
Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\forall x \exists y \neg P(x,y).$$

1. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle \models \varphi$.
2. Determinare se $\langle \mathbb{N}, \geq\rangle \models \varphi$.
3. L'enunciato φ è soddisfacibile? È valido?

Giustificare le proprie risposte.

5 Logica del prim'ordine: formalizzazione

Esercizio 1
Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la seguente affermazione

La somma di tre numeri dispari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo $+$ (interpretato nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(x)$ che formalizzi "x è un numero pari".

Esercizio 2
Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la seguente affermazione

Il doppio di un numero pari è un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli $+$ e 1 (interpretati nella maniera usuale) e il simbolo $|$ per la relazione di divisibilità.

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(w)$ che formalizzi "w è un numero pari".

Esercizio 3
Formalizzare in $\mathbb{Q}$ la seguente affermazione

Il quadrato di un numero strettamente negativo è strettamente positivo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $<$ (interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $Z(w)$ che formalizzi "w è il numero 0".

Esercizio 4

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Esiste un numero naturale che è la radice quadrata di y.

   utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$ e $\cdot$ interpretati nella maniera usuale.
2. Utilizzando lo stesso linguaggio, formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice quadrata.

Esercizio 5
Formalizzare la seguente frase:

Esiste una costante k ed infiniti numeri primi p tali che $p+k$ è anch'esso primo.

utilizzando il linguaggio contenente soltanto i simboli $\cdot, +, \leq$ e 1 (interpretati nella maniera usuale).

Esercizio 6
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Esercizio 7
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

> Ogni numero maggiore di 1 è diviso da un numero primo.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $<$ (interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $P(w)$ che formalizzi "w è un numero primo" e una L-formula $D(w, x)$ che formalizzi "w divide x".

Esercizio 8
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

> Ci sono numeri pari arbitrariamente grandi la cui metà è un quadrato perfetto.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $<$, $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Esercizio 9
Formalizzare in $\mathbb{R}$ la seguente affermazione

> Il prodotto di un numero per il suo opposto è l'opposto del suo quadrato.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente i simboli $\cdot$ e 0 (interpretati nella maniera usuale). Si ricordi che l'opposto di un numero reale è il numero stesso cambiato di segno.

Suggerimento. Scrivere prima una L-formula $Z(x, y)$ che formalizzi "x è l'opposto di y", sfruttando il fatto che un numero e il suo opposto hanno lo stesso quadrato (attenzione: bisogna distinguere il caso in cui y sia il numero 0 dai restanti casi).

Esercizio 10
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione

> Il cubo di un numero pari è anch'esso un numero pari.

utilizzando il linguaggio del prim'ordine contenente solo i simboli $\cdot$ e $+$ (interpretati nella maniera usuale).

Esercizio 11
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario $<$, ed il simbolo funzionale binario $+$:

> Ogni numero pari sufficientemente grande è la somma di due numeri pari distinti.

Esercizio 12
Formalizzare (in un universo il cui dominio è l'insieme degli esseri umani) in un linguaggio del prim'ordine con un simbolo relazionale $G(x, y)$ per "x è genitore di y" ed un simbolo predicativo unario $B(x)$ per "x ha i baffi" il seguente enunciato:

> C'è chi ha un cugino i cui nonni hanno tutti i baffi.

Suggerimento. Definire prima formule $N[x, y]$ e $C[x, y]$ per formalizzare le relazioni: "x è nonno di y" e "x è cugino di y".

Esercizio 13
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo $\cdot$ per il prodotto tra numeri naturali:

> Tutti i multipli di un multiplo di un numero, sono multipli di quel numero.

Si consiglia di definire prima una formula $M(x, y)$ che formalizzi "x è multiplo di y".

Esercizio 14
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente soltanto un simbolo funzionale binario $\cdot$ per il prodotto tra numeri naturali:

> Tutti i divisori di un prodotto di due numeri naturali sono divisori di uno dei due.

Esercizio 15
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario $<$, il simbolo funzionale binario $/$ per la divisione, la costante 0 (tutti interpretati nella maniera usuale), e il simbolo predicativo unario N, dove $N(x)$ è interpretato come "x è un numero naturale":

> Per ogni coppia di numeri naturali distinti c'è un numero razionale compreso strettamente tra essi.

Esercizio 16
Formalizzare il seguente enunciato nel linguaggio contenente il simbolo relazionale binario A, dove $A(x, y)$ è interpretato come "x è antenato di y" e l'universo di discorso si intende costituito da tutte le persone:

> Ci sono figli unici.

Esercizio 17
Formalizzare in $\mathbb{N}$ con il linguaggio contenente i simboli $<$, $\times$ e 1 la seguente proposizione (falsa):

> Tutti i numeri sufficientemente grandi ammettono almeno due divisori primi.

Definire prima, mediante opportune formule da usare come abbreviazioni, la relazione di divisibilità e la proprietà di essere un numero primo.

Esercizio 18
Formalizzare in $\mathbb{N}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli $<$, $\times$, $+$ e 1:

> Ci sono infiniti numeri n tali che $3n^2 + 1$ è un quadrato perfetto

Esercizio 19
Formalizzare in $\mathbb{R}$ il seguente enunciato nel linguaggio contenente i simboli 1, $+$ e $\cdot$:

> Se n e m sono coprimi (cioè relativamente primi), allora $n \cdot a + m \cdot b = 1$ per qualche a e b.

Esercizio 20
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente frase

> Se ci sono elementi arbitrariamente piccoli che godono della proprietà P, allora la funzione f è suriettiva

utilizzando il linguaggio contenente i simboli: P, $<$ e f.

Esercizio 21
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione in un linguaggio contenente un simbolo di predicato unario P che descrive la proprietà di essere un numero primo, il simbolo $<$ di relazione binaria per l'ordinamento, il simbolo di funzione binaria $+$ per la somma, e la costante 1:

> Ogni numero dispari sufficientemente grande è somma di tre numeri primi, non necessariamente distinti

Esercizio 22
Sia L un linguaggio del prim'ordine contenente il simbolo relazionale binario P. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone, $a\ P^{\mathcal{A}}\ b$ se e solo se a è genitore di b. Formalizzare in $\mathcal{A}$ la seguente affermazione:

> Tutti i cugini dei fratelli di una persona sono anche cugini di quella persona.

Esercizio 23
Formalizzare in $\mathbb{N}$ la seguente affermazione:

> Se a e b sono relativamente primi, allora ci sono infiniti numeri primi congruenti ad a modulo b

usando i simboli 1, $<$, $+$ e $\cdot$.

Suggerimento. Cominciare a formalizzare il predicato di divisibilità $\mid$ e il predicato di primalità Pr.

Esercizio 24
Sia L in un linguaggio del prim'ordine in cui ci sono costanti individuali g per Giuseppe, m per Maria e i simboli relazionali binari S, F, dove $S(x, y)$ significa che x ha sposato y e $F(x, y)$ significa che y è figlio di x. Sia $\mathcal{A}$ la L-struttura il cui supporto consiste dell'insieme delle persone. Formalizzare in $\mathcal{A}$ la seguente frase:

> Uno dei cugini di Giuseppe ha sposato una nipote di Maria

Esercizio 25
Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

> *Ogni numero pari maggiore di 2 è il prodotto di due numeri pari distinti.*

utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $\cdot$ e 2 (tutti interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento: Scrivere prima una formula $\varphi(x)$ che formalizzi "x è pari".

Esercizio 26
Formalizzare in $\mathbb{N}$ l'affermazione

> *Esistono infiniti numeri primi.*

utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $\cdot$ e 1 (tutti interpretati nella maniera usuale).

Suggerimento: Scrivere prima una formula $\varphi(x)$ che formalizzi "x è un numero primo".

Esercizio 27 1.

Formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

> Il numero y è la radice cubica di qualche numero.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

> Ci sono numeri arbitrariamente grandi che hanno una radice cubica.

Esercizio 28 1.

Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

> Il numero y ammette una radice quadrata.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $>, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

> Ci sono numeri arbitrariamente grandi che sono il quadrato di qualche numero.

Esercizio 29 1.

Formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

> Il numero y è diviso dal numero x.

utilizzando il linguaggio formato dal simbolo $\cdot$ di moltiplicazione interpretato nella maniera usuale.

2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $0, \cdot$ interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{Z}$ la frase

> Se un numero è non nullo, non può essere diviso da 0.