UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

Automi a stati finiti non deterministici

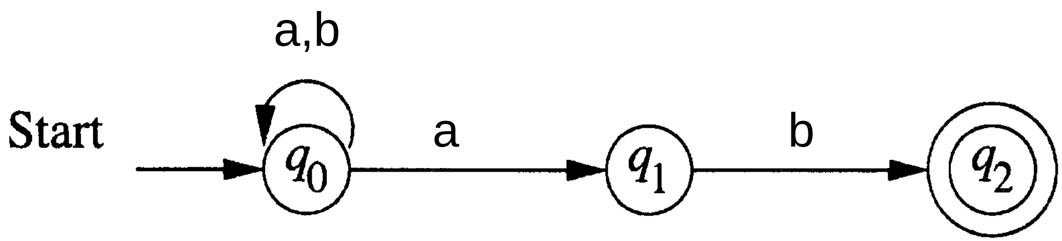
a.a. 2018-2019

Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

Consideriamo l'automa seguente che riconosce le stringhe sull'alfabeto $\{$a, b$\}$ che *terminano* con ab.

Linguaggio: {a,b}* {ab}

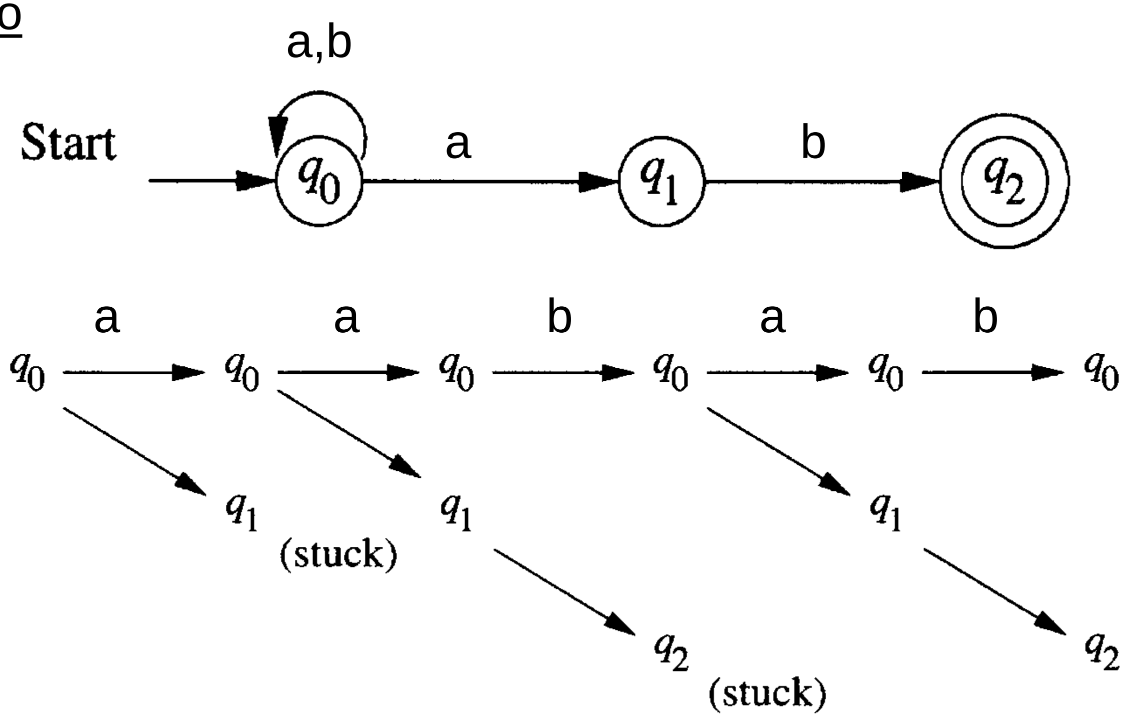


Questo automa è *non-deterministico* perché nello stato q_0 sono definite due transizioni diverse per il simbolo a.

Automa finito non deterministico: NFA

Un automa non deterministico accetta una stringa se *esiste* una sequenza di mosse che porta il controllo in uno stato finale

Esempio

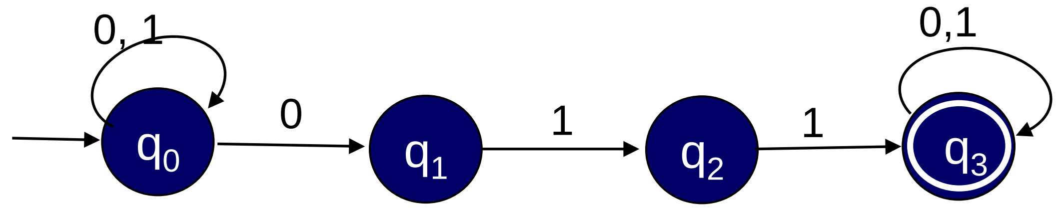


Un NFA può essere in vari stati nello stesso momento, oppure, visto in un altro modo, può "scommettere" su quale sarà il prossimo stato "giusto".

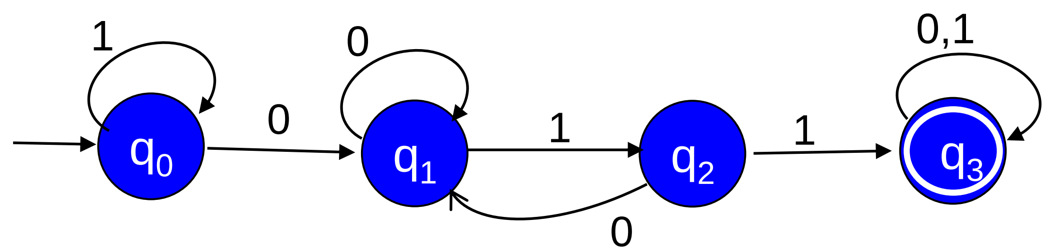
Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

Un automa non deterministico che accetta il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto {0,1} che presentano almeno una occorrenza della sottostringa 011



Un automa deterministico equivalente

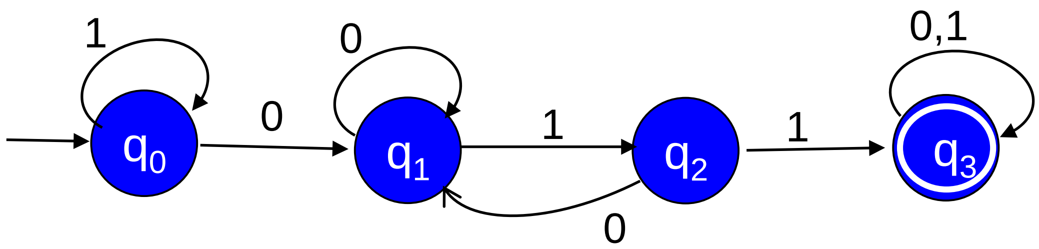


Quali sono le differenze?

Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

In presenza della stringa 1001100111,
come si comporta l'automa deterministico?



1	0	0	1	1	0	0	1	1	1		

q_0 q_0 q_1 q_1 q_2 q_3 q_3 q_3 q_3 q_3 q_3

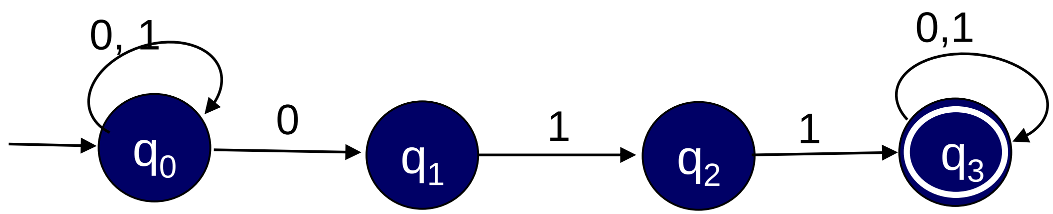
L'automa deterministico ha solo una strada e accetta la stringa riconoscendo la prima occorrenza di 011.

E l'automa non deterministico?

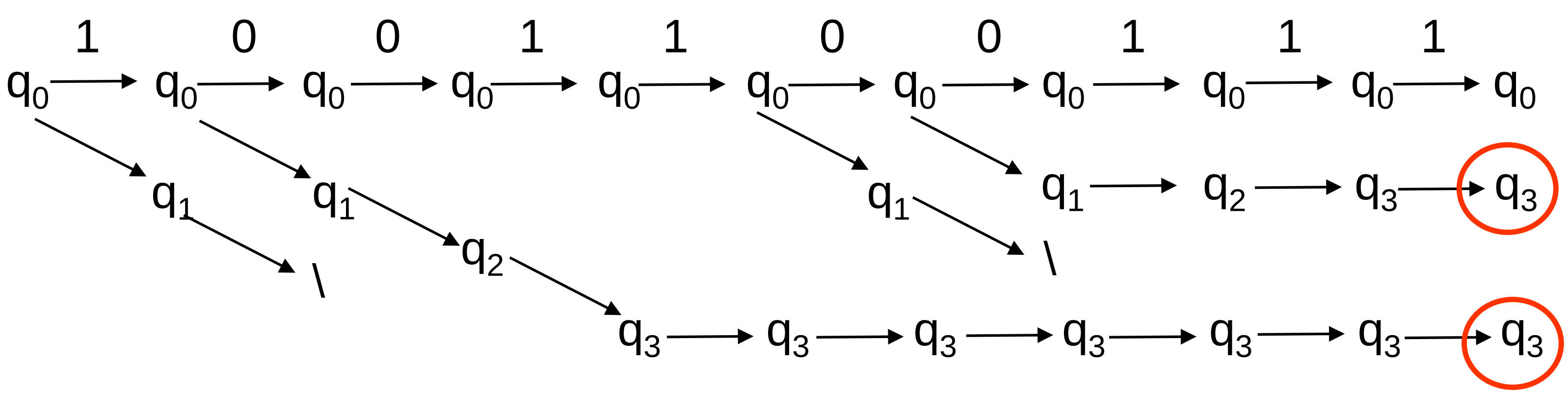
Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

E l'automa non deterministico?



1	0	0	1	1	0	0	1	1	1		



L'automa ha due strade che portano il controllo nello stato finale. Una riconosce la prima e l'altra la seconda occorrenza di 011.

Automa finito non deterministico: NFA

Possiamo anche pensare a un NFA nel modo seguente: l'automa, di fronte ad una scelta multipla, crea tante copie di se stesso, una per ogni alternativa di scelta.

- Un NFA è una quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

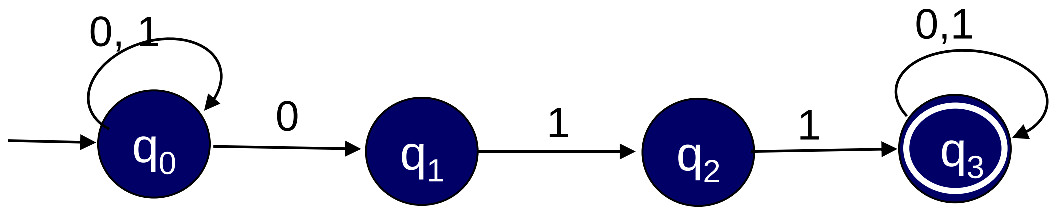
- δ è una *funzione di transizione* che alle coppie <stato, simbolo in input> associa un sottoinsieme degli stati $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

- Per semplicità estendiamo la definizione della funzione di transizione agli insiemi di stati:

$$\delta(\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}, a) = \cup \{\delta(r_i, a) \mid i = 1,2,\ldots,k\}$$

Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

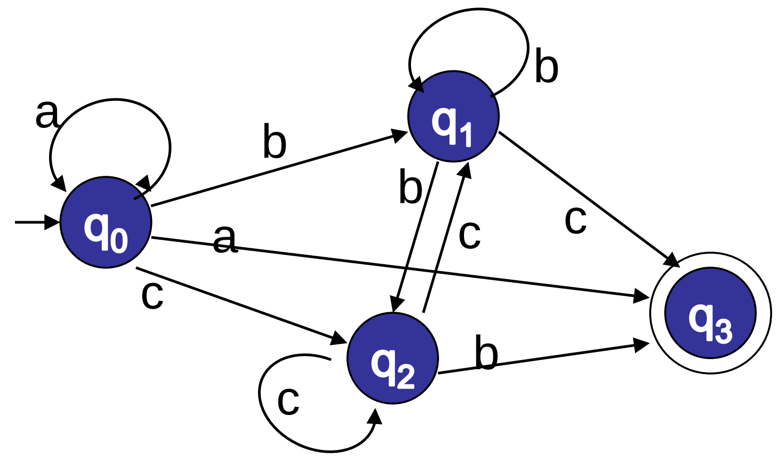


$N = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
$\delta(q_0, 1) = \{q_0\}$
$\delta(q_1, 0) = \Phi$
$\delta(q_1, 1) = \{q_2\}$
$\delta(q_2, 0) = \Phi$
$\delta(q_2, 1) = \{q_3\}$
$\delta(q_3, 0) = \{q_3\}$
$\delta(q_3, 1) = \{q_3\}$

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	Φ	$\{q_2\}$
q_2	Φ	$\{q_3\}$
$*q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Esempio



A = < $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, {a, b, c}, δ, q_0, $\{q_3\}$ >
dove la funzione di transizione è definita come:

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_3\}$
$\delta(q_0, b) = \{q_1\}$
$\delta(q_0, c) = \{q_2\}$
$\delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$
$\delta(q_1, c) = \{q_3\}$
……….etc.

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_0,q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	Φ	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	Φ	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$
$* q_3$	Φ	Φ	Φ

Automa finito non deterministico: NFA

- Estendiamo alle stringhe la definizione della funzione di transizione:

$$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

Definizione

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(r, a) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

- Formalmente, il linguaggio riconosciuto (o accettato) da un automa non deterministico A è:

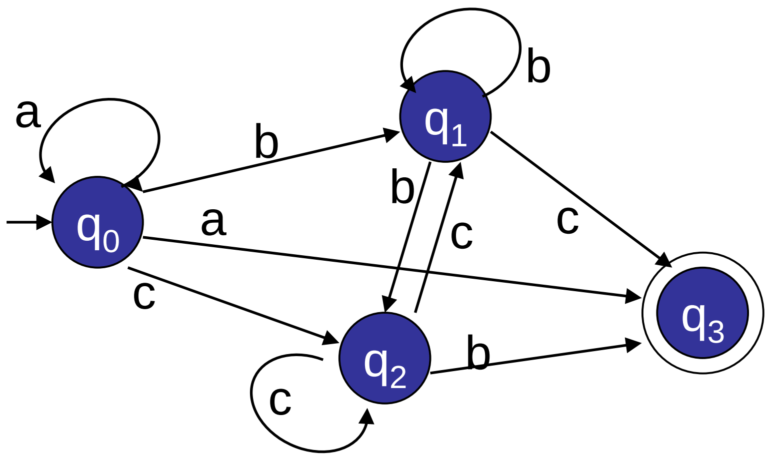
$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \Phi\}$$

Automa finito non deterministico: NFA

Esempio

($\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\{a, b, c\}$, $\{\delta(q_0,a) = \{q_0,q_3\}$, $\delta(q_0,b)= \{q_1\}$, $\delta(q_0,c) = \{q_2\}$,

$\delta(q_1,b) = \{q_1,q_2\}$, $\delta(q_1,c) = \{q_3\}$, $\delta(q_2,c)= \{q_1,q_2\}$, $\delta(q_2,b) = \{q_3\}\}$, q_0, $\{q_3\}$)



$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \delta(\hat{\delta}(q_0, bb), b) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, b), b), b) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), b), b), b) =$

$= \delta(\delta(\delta(\{q_0\}, b), b), b) = \delta(\delta(\{q_1\}, b), b) = \delta(\{q_1,q_2\}, b) = \{q_1,q_2,q_3\}$

$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \{q_1,q_2,q_3\}$

$\{q_1,q_2,q_3\} \cap F = \{q_3\} \neq \Phi \Rightarrow$ la stringa bbb è accettata

Equivalenza tra NFA e DFA

Teorema

Dato un automa a stati finiti non deterministico, *N*, esiste un automa deterministico *D*, equivalente ad *N*.

Input: un automa *N* a stati finiti non deterministico.

Output: un automa *D* deterministico, equivalente ad *N*.

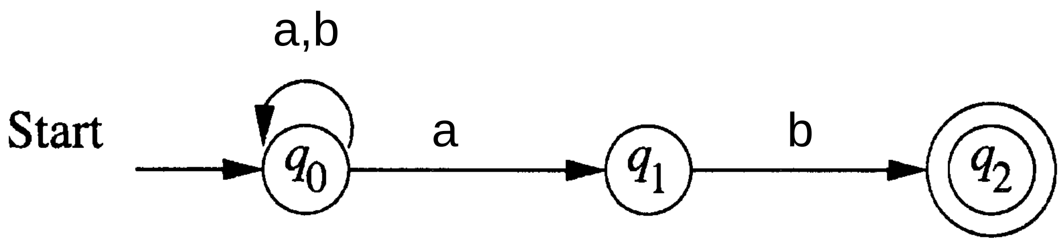
Algoritmo: Sia $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Costruire $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0D}, F_D)$, dove:

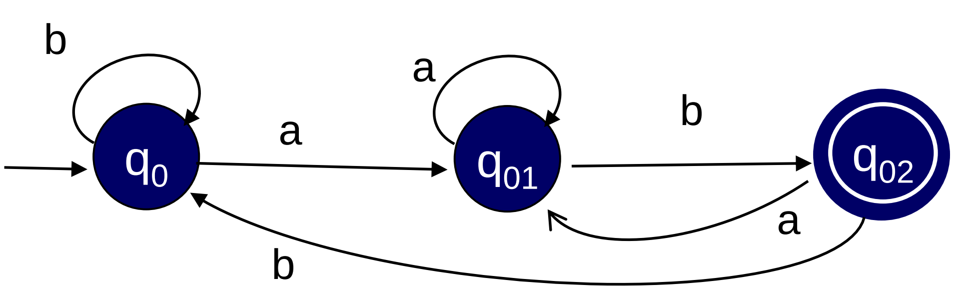
- Q_D è l'insieme dei sottinsiemi di Q.
- δ_D: $\delta_D([p_1, p_2, \ldots, p_k], a) = \bigcup_{i=1}^{k} \{\delta(p_i, a)\}$
- $q_{0D} = q_0$
- $F_D = \{[p_1, p_2, \ldots, p_k] \mid \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \cap F \neq \Phi\}$.

Il teorema dimostra che i due modelli di automi finiti, deterministico e non deterministico, hanno la stessa potenza riconoscitiva, cioè che *riconoscono la stessa classe di linguaggi*.

Esempio

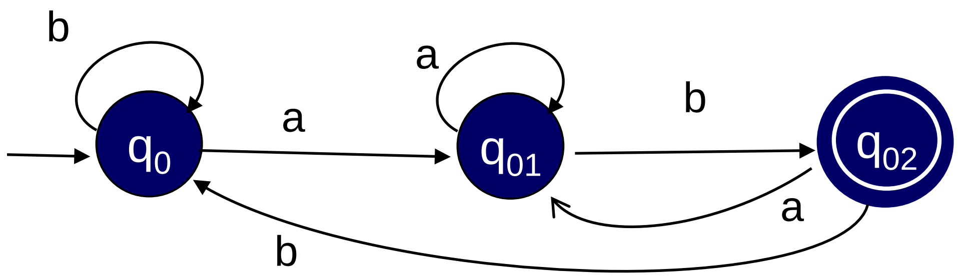


	a	b
→ $[q_0]$	$[q_0,q_1]$	$[q_0]$
$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_2]$
$[q_0,q_2]$	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_3]$
$*[q_0,q_3]$	$[q_0,q_1,q_3]$	$[q_0]$



Equivalenza tra NFA e DFA

N.B. $Q \subset 2^Q$



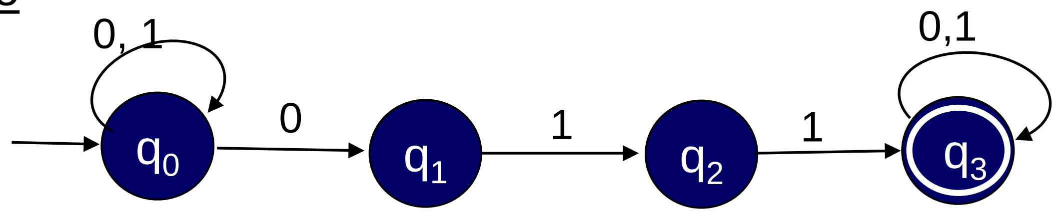
$Q = \{[q_0], [q_0,q_1], [q_0,q_2]\} \subset$

$\subset \{[q_0], [q_0,q_1], [q_0,q_2], [q_0,q_3], [q_0,q_1,q_3], [q_0,q_2,q_3]\} = 2^Q$

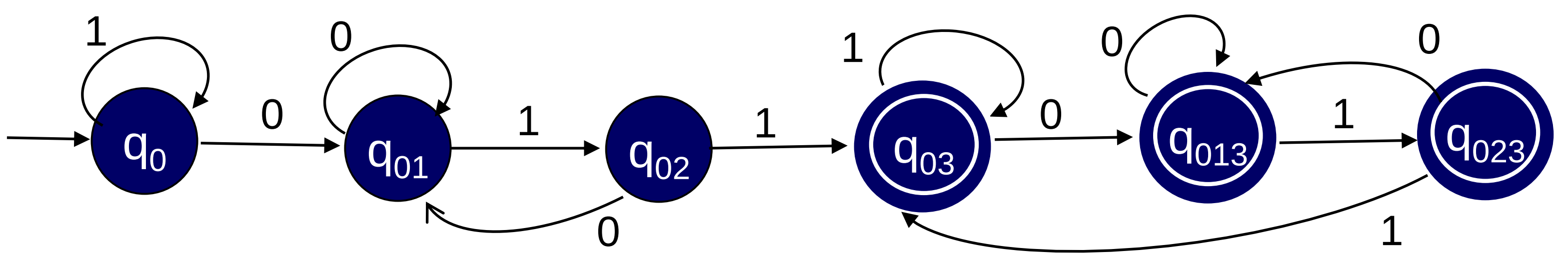
Alcuni stati, ad esempio $[q_1,q_2]$ e $[q_3]$ (che rappresentano i corrispondenti insiemi), non sono raggiungibili dallo stato iniziale e perciò inutili.
Quando si applica l'algoritmo conviene prendere in esame solo gli stati che via via si presentano nella costruzione della funzione di transizione.

Equivalenza tra NFA e DFA

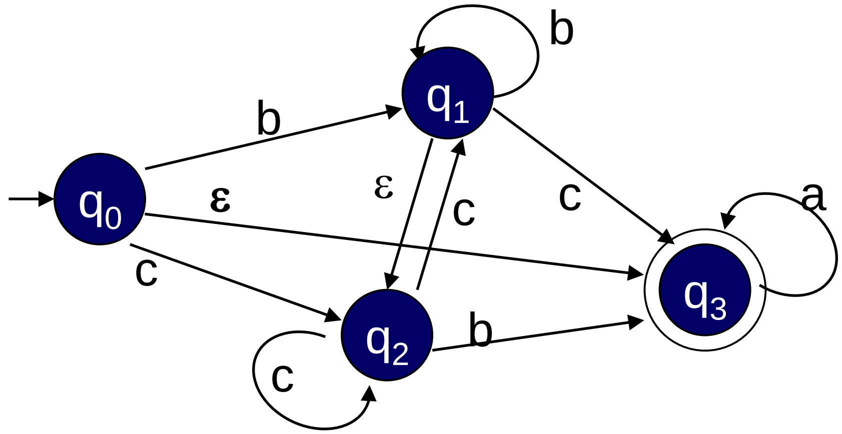
Esempio



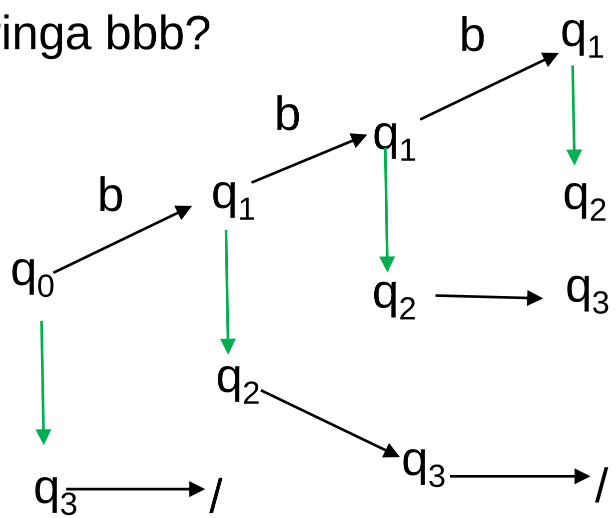
	0	1
→[q_0]	[q_0,q_1]	[q_0]
[q_0,q_1]	[q_0,q_1]	[q_0,q_2]
[q_0,q_2]	[q_0,q_1]	[q_0,q_3]
*[q_0,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_3]
*[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_2,q_3]
*[q_0,q_2,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_3]



Esempio



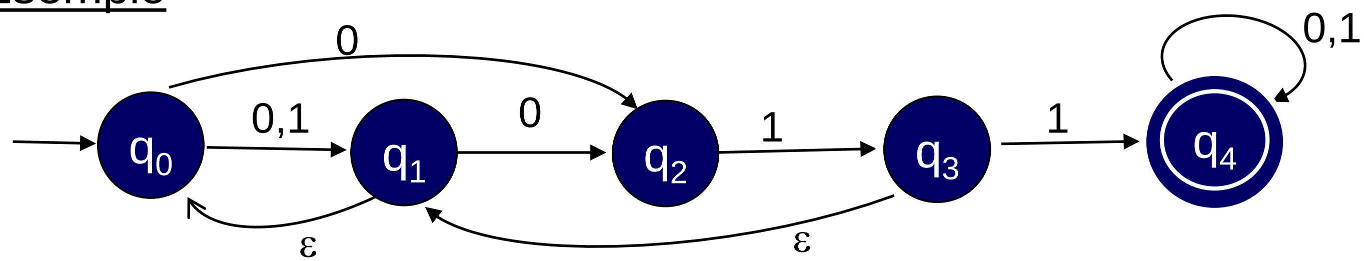
Come si comporta questo automa sulla stringa bbb?



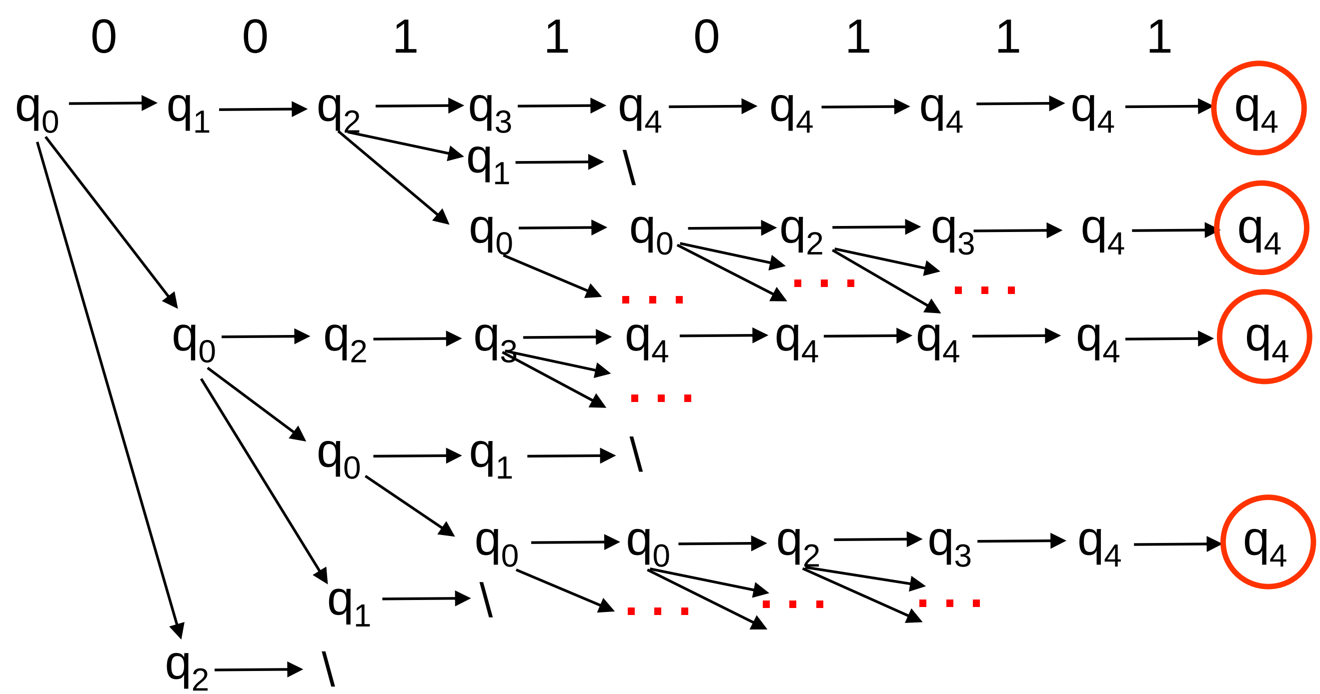
Gli archi etichettati ε indicano che il controllo può cambiare stato senza leggere simboli sul nastro di input, può cioè effettuare una transizione spontanea.

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Esempio



Come si comporta questo automa sulla stringa 00110111?



Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Un *<u>automa finito con mosse spontanee</u>* è un automa non deterministico nel quale la funzione di transizione può essere definita non solo sulle coppie <stato, simbolo in input>, ma anche solo su uno stato, e specifica un insieme di possibili stati successori per il controllo:

- Un ε-NFA è una quintupla

$$E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- δ è una *<u>funzione di transizione</u>*

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

- Funzione di transizione estesa alle stringhe: $\hat{\delta}: Q \text{ x } \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

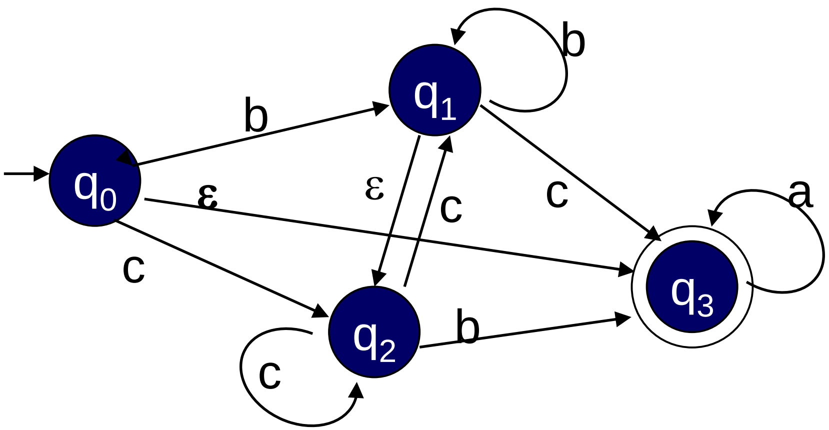
- Formalmente, il linguaggio <u>riconosciuto</u> (o <u>accettato</u>) da E è

$$L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \Phi\}$$

N.B. Per poter definire la funzione di transizione estesa alle stringhe servono alcune definizioni.

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Esempio



$E = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$\delta(q_0,\varepsilon) = \{q_3\}$, $\delta(q_0,b) = \{q_1\}$, $\delta(q_0,c) = \{q_2\}$,
$\delta(q_1,\varepsilon) = \{q_2\}$, $\delta(q_1,b) = \{q_1\}$, $\delta(q_1,c) = \{q_3\}$,
$\delta(q_2,c) = \{q_1,q_2\}$, $\delta(q_2,b) = \{q_3\}$,
$\delta(q_3,a) = \{q_3\}$.

δ	a	b	c	ε
q_0	Φ	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	Φ	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_2	Φ	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$	Φ
q_3	$\{q_3\}$	Φ	Φ	Φ

? ?

Come definire la funzione di transizione sulle stringhe in modo che vengano considerati tutti i cammini, ad esempio:

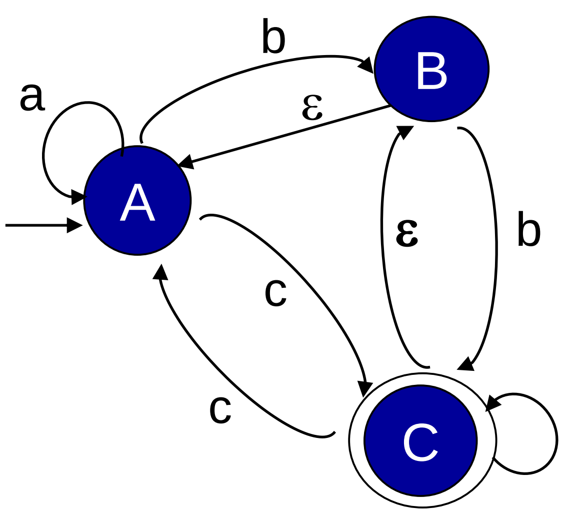
$$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \{q_1,q_2,q_3\}$$

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

La ε-chiusura di uno stato è l'insieme degli stati da esso raggiungibili con una sequenza di mosse ε

Definizione

- $\text{ECLOSE}(q) = \{q\} \cup \left(\bigcup_{p \in \delta(q, \varepsilon)} \text{ECLOSE}(p)\right)$ ε-chiusura di uno stato
- $\text{ECLOSE}(\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}) = \bigcup_{i=1\ldots r} \text{ECLOSE}(p_i)$ ε-chiusura di un insieme di stati
- Un insieme di stati P è ε-chiuso se $\forall p \in P,\ \text{ECLOSE}(p) \subseteq P$



$\text{ECLOSE}(A) = \{A\}$
$\text{ECLOSE}(B) = \{B\} \cup \{\text{ECLOSE}(A)\} = \{B, A\}$
$\text{ECLOSE}(C) = \{C\} \cup \{\text{ECLOSE}(B)\} = \{C, B, A\}$

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Estensione della *funzione di transizione*

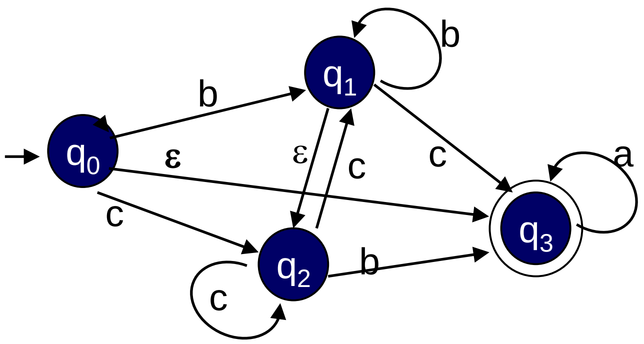
$$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

Definizione

$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \text{ECLOSE}\{q\}$

$\hat{\delta}(q, xa) = \text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q, x), a))$

Esempio



$\hat{\delta}(q_0, bbb) = \text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, bb), b)) = \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, b), b)), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), b)), b), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\{q_0,q_3\}, b)), b)), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\{q_1\}), b)), b)) = \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\delta(\{q_1,q_2\}, b)), b)) =$

$= \text{ECLOSE}(\delta(\text{ECLOSE}(\{q_1,q_3\}), b)) = \text{ECLOSE}(\delta(\{q_1,q_2,q_3\}, b)) =$

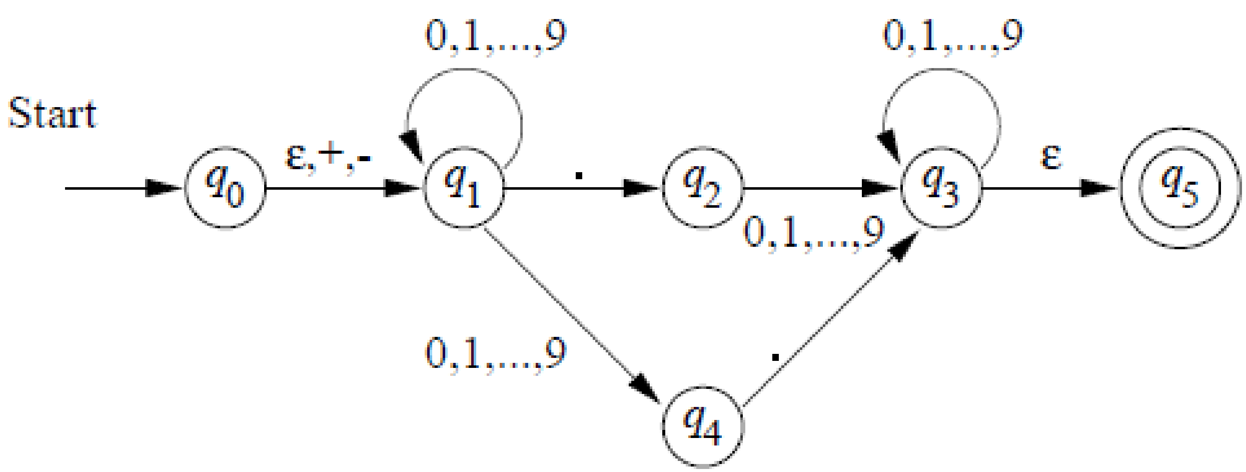
$= \text{ECLOSE}(\{q_1,q_3\}) = \{q_1,q_2,q_3\}$

<u>Esempio</u>

ε-NFA che accetta numeri decimali formati da:

1. Segno + o – facoltativo
2. Una sequenza di cifre, eventualmente vuota
3. Un punto decimale
4. Una seconda sequenza di cifre che può essere vuota solo se non lo è la sequenza prima del punto decimale

ϵ-NFA E



Equivalenza tra ε-NFA e DFA

Teorema
Dato un automa a stati finiti non deterministico con mosse spontanee, *E*, esiste un automa deterministico *M*, equivalente a *E*.

Input: un automa *E* a stati finiti non deterministico con ε-transizioni.
Output: un automa *M* deterministico, equivalente a *E*.

Algoritmo: Sia $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

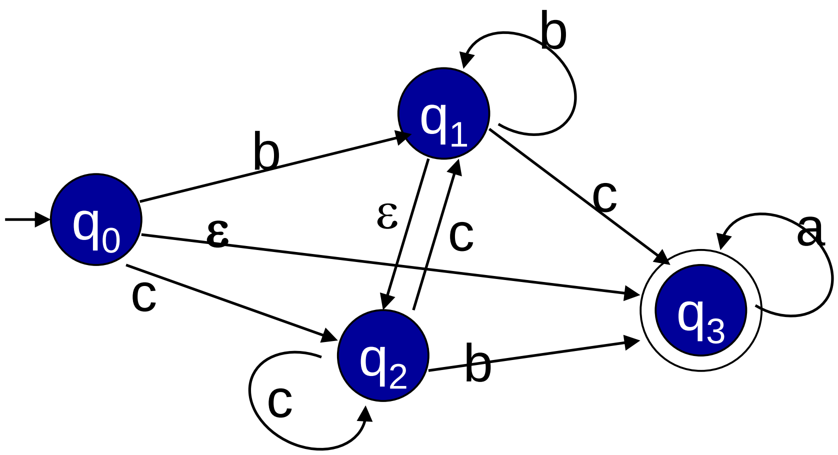
Costruire $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0D}, F_D)$, dove:

- Q_D è l'insieme dei sottinsiemi ε-chiusi di Q.
- δ_D: $\delta_D([p_1, p_2, . . . , p_k], a) = \text{ECLOSE}(\bigcup_{i=1}^{k} \{\delta(p_i, a)\})$
- $q_{0D} = \text{ECLOSE}(q_0)$
- $F_D = \{[p_1, p_2, . . . , p_k] \mid \{p_1, p_2, . . . , p_k\} \cap F \neq \Phi\}$.

Il teorema dimostra che gli automi finiti deterministici e non deterministici con mosse spontanee hanno la stessa potenza riconoscitiva, cioè che *riconoscono la stessa classe di linguaggi*.

ε-NFA versus DFA

Esempio



δ	a	b	c	ε
q_0	Φ	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	Φ	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_2	Φ	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$	Φ
q_3	$\{q_3\}$	Φ	Φ	Φ

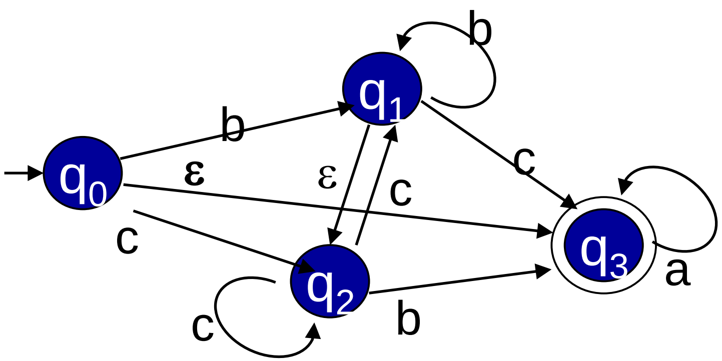
$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_3\}$
$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_2\}$
$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2\}$
$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$

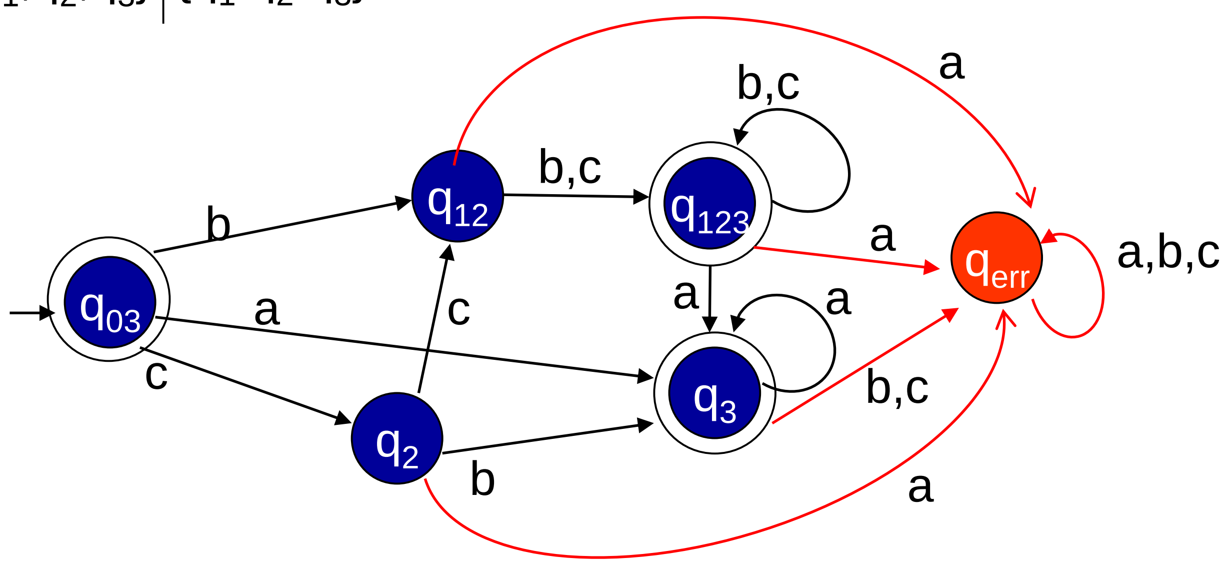
δ_D	a	b	c
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1,q_2\}$		$\{q_1,q_2\ q_3\}$	$\{q_1,q_2\ q_3\}$
$\{q_2\}$		$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_3\}$	$\{q_3\}$		
$\{q_1,q_2\ q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\ q_3\}$	$\{q_1,q_2\ q_3\}$

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Esempio

δ	a	b	c
$\{q_0,q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1,q_2\}$		$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$
$\{q_2\}$		$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_3\}$	$\{q_3\}$		
$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$

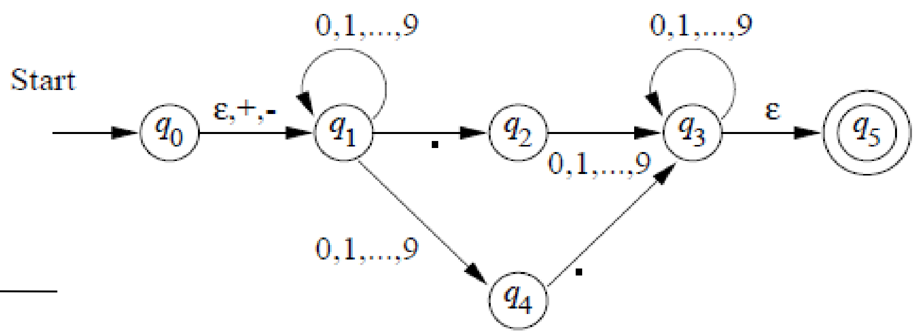




Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

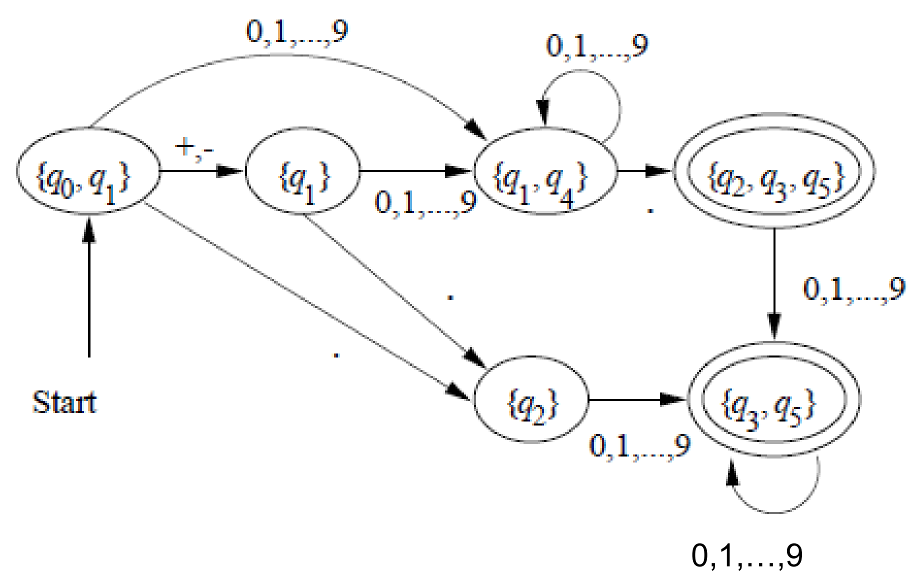
Esempio

ε-NFA E



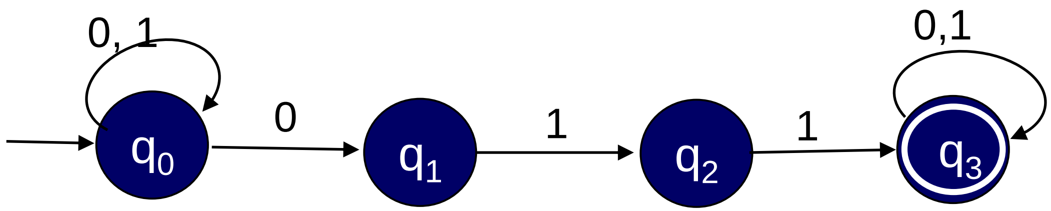
δ_D	+, -	0,1,…,9	.
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1,q_4\}$		$\{q_1,q_4\}$	$\{q_2,q_3,q_5\}$
$\{q_2\}$		$\{q_3,q_5\}$	
$\{q_2,q_3,q_5\}$		$\{q_3,q_5\}$	
$\{q_3,q_5\}$		$\{q_3,q_5\}$	

DFA D corrispondente ad E



Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Esempio



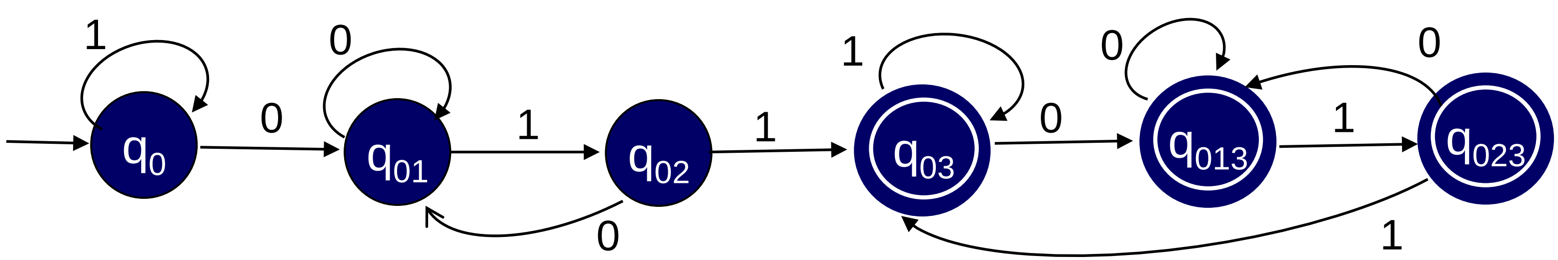
ECLOSE(q_0) = {q_0}

ECLOSE(q_1) = {q_1}

ECLOSE(q_2) = {q_2}

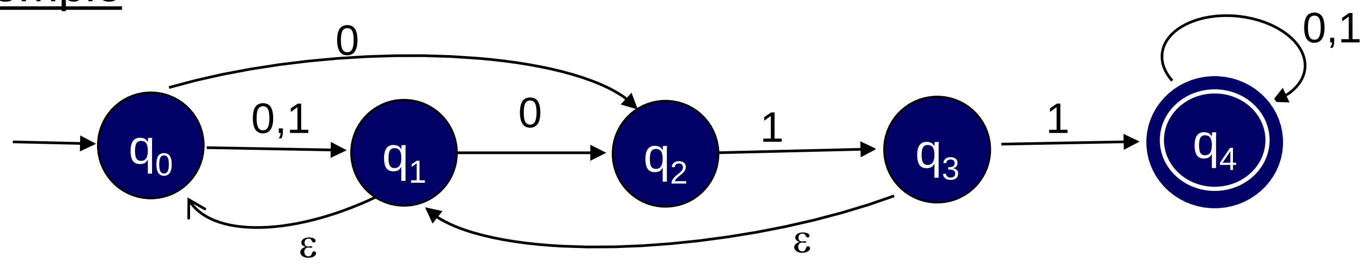
ECLOSE(q_3) = {q_3}

δ	0	1
[q_0]	[q_0,q_1]	[q_0]
[q_0,q_1]	[q_0,q_1]	[q_0,q_2]
[q_0,q_2]	[q_0,q_1]	[q_0,q_3]
[q_0,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_3]
[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_2,q_3]
[q_0,q_2,q_3]	[q_0,q_1,q_3]	[q_0,q_3]



Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

Esempio



$\mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0\}$

$\mathrm{ECLOSE}(q_1) = \{q_0,q_1\}$

$\mathrm{ECLOSE}(q_2) = \{q_2\}$

$\mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_0,q_1,q_3\}$

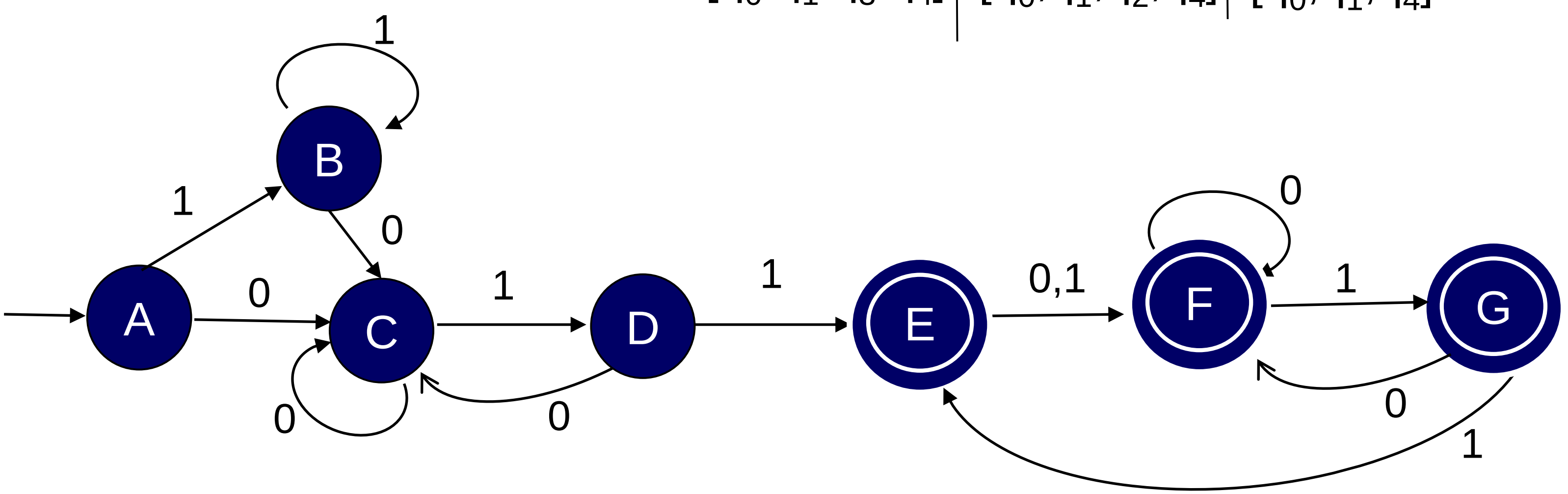
$\mathrm{ECLOSE}(q_4) = \{q_4\}$

	δ	0	1
A	$[q_0]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1]$
B	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1]$
C	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_3]$
D	$[q_0,q_1,q_3]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_4]$
E	$[q_0,q_1,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$
F	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_3,q_4]$
G	$[q_0,q_1,q_3,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_4]$

Automa finito con mosse spontanee: ε-NFA

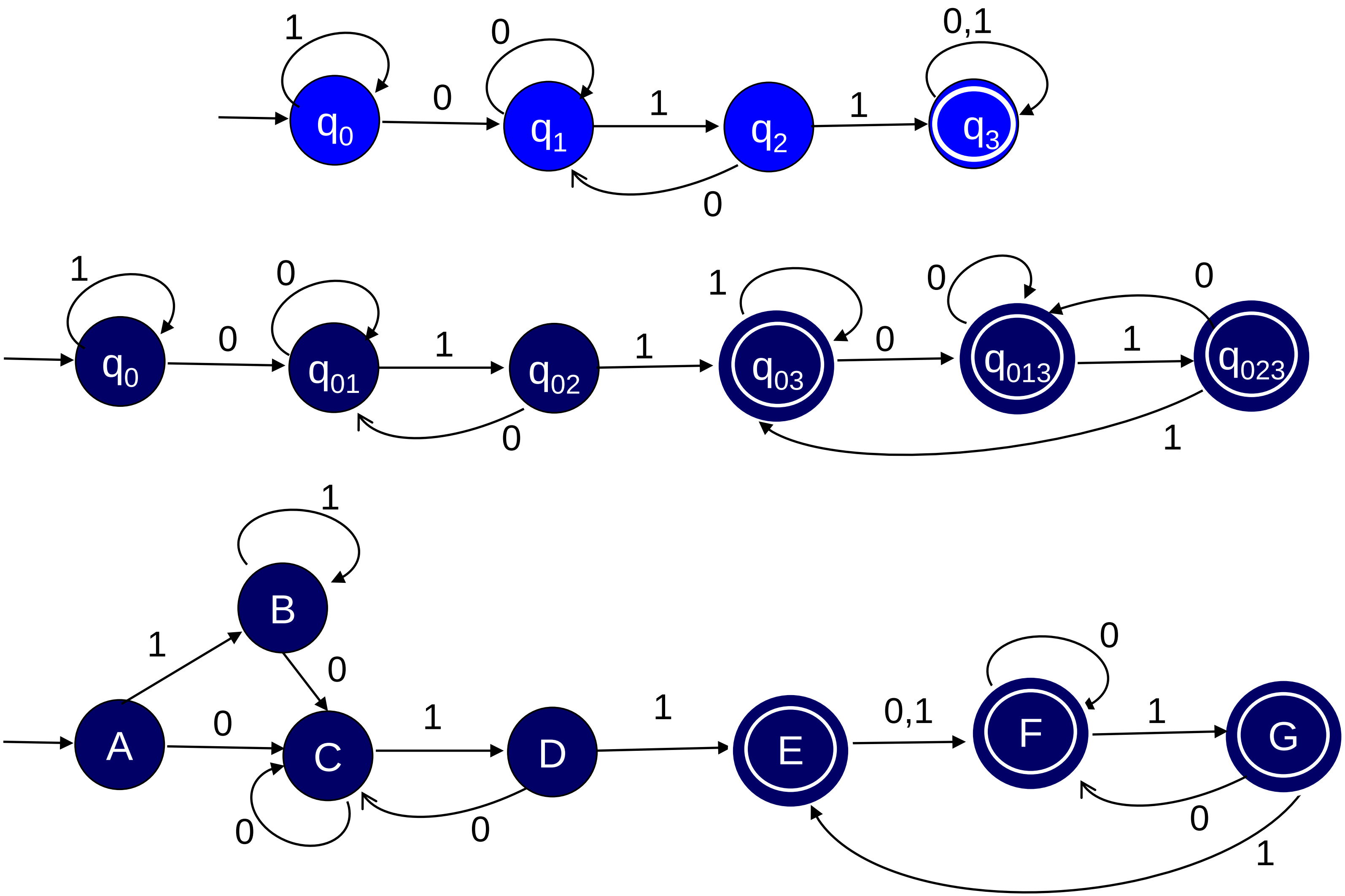
<u>Esempio</u>

	δ	0	1
A	$[q_0]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1]$
B	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1]$
C	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_3]$
D	$[q_0,q_1,q_3]$	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_1,q_4]$
E	$[q_0,q_1,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$
F	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_3,q_4]$
G	$[q_0,q_1,q_3,q_4]$	$[q_0,q_1,q_2,q_4]$	$[q_0,q_1,q_4]$



Automi a stati finite deterministici

Tre automi finiti deterministici che riconoscono lo stesso linguaggio

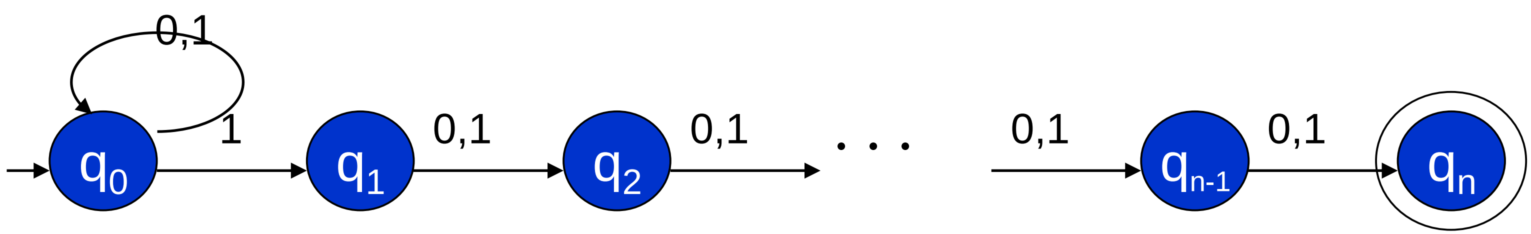


NFA e ε-NFA versus DFA

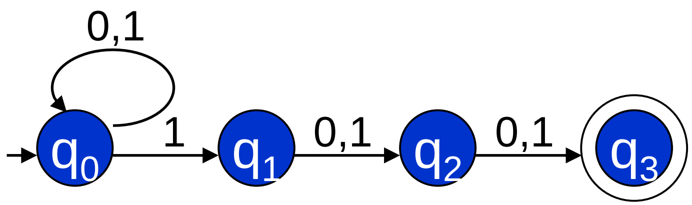
Nella pratica è frequente ottenere l’automa finito deterministico con approssimativamente lo stesso numero di stati dell’automa non deterministico a partire dal quale è stato costruito.

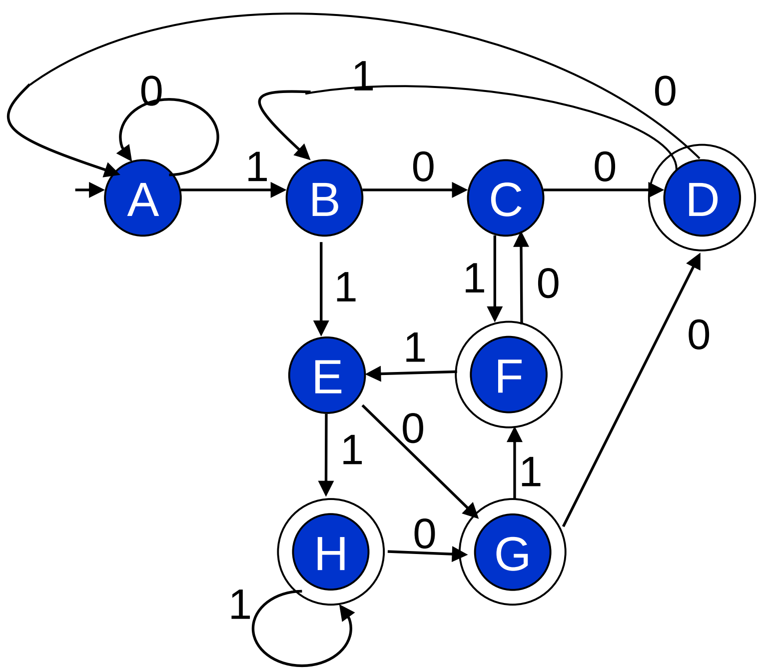
Tuttavia è possibile una crescita esponenziale del numero degli stati: nel seguente esempio risultano accessibili 2^n stati nel DFA costruito a partire da un NFA con n +1 stati.

Esempio:



Consideriamo il caso particolare n = 3





		0	1
A	$[q_0]$	$[q_0]$	$[q_0,q_1]$
B	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_2]$	$[q_0,q_1,q_2]$
C	$[q_0,q_2]$	$[q_0,q_3]$	$[q_0,q_1,q_3]$
D	$[q_0,q_3]$	$[q_0]$	$[q_0,q_1]$
E	$[q_0,q_1,q_2]$	$[q_0,q_2,q_3]$	$[q_0,q_1,q_2,q_3]$
F	$[q_0,q_1,q_3]$	$[q_0,q_2]$	$[q_0,q_1,q_2]$
G	$[q_0,q_2,q_3]$	$[q_0,q_3]$	$[q_0,q_1,q_3]$
H	$[q_0,q_1,q_2,q_3]$	$[q_0,q_2,q_3]$	$[q_0,q_1,q_2,q_3]$

Il numero di stati dell'automa deterministico è 2^3

Esercizi

Per ognuno dei seguenti ε-NFA:

	ε	a	b	c
→p	Φ	{p}	{q}	{r}
q	{p}	{q}	{r}	Φ
*r	{q}	{r}	Φ	{p}

	ε	a	b	c
→p	{q,r}	Φ	{q}	{r}
q	Φ	{p}	{r}	{p,q}
*r	Φ	Φ	Φ	Φ

1. Calcolare l'ε-chiusura di ogni stato;
2. Elencare le stringhe accettate di lunghezza minore o uguale a tre;
3. Costruire il DFA equivalente.

Esercizi

Costruire gli automi a stati finiti deterministici equivalenti ai seguenti automi non deterministici: