Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

- ☐ $\{s \in \mathbb{Q}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$
- ☐ $\{s \in \{0, 1/2\}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$
- ☐ $\{s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$
- ☐ $\{s \in \mathbb{R}^{<\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$

(b) Sia $f\colon A \to B$ iniettiva. 2 punti
Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- ☐ Se $g\colon B \to A$ è iniettiva, allora f è biettiva.
- ☐ Se B è finito allora A è finito.
- ☐ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ è non vuoto.
- ☐ $|B| \leq |A|$.

(c) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

- ☐ $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$.
- ☐ La formula $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall y \exists x R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.
- ☐ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.
- ☐ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x, y)$ è insoddisfacibile.

(d) Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti

- ☐ $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R} \models \mathrm{P} \to \mathrm{R}$
- ☐ Se $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$ allora $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$.
- ☐ Se P è una contraddizione allora $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$.
- ☐ Se P è una tautologia e $\mathrm{P} \models \neg\mathrm{Q}$ allora Q è una contraddizione.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad C \vee \neg A \\ P_2 &: \quad A \to B \\ P_3 &: \quad \neg C \to \neg B. \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $P_1, P_2 \models P_3$
- $P_3, P_1 \models P_2$
- $P_2, P_3 \models P_1$.

Esercizio 3 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   x è un numero primo

   utilizzando il linguaggio formato dai simboli $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale.
2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $+$, $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Per ogni $n > 1$ c'è almeno un primo compreso tra n e $2n$.

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \forall z \neg P(z, x) \wedge \forall z \neg P(z, y)).$$

Determinare in quali delle seguenti strutture φ è vera:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è la relazione $<$.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, P^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}} = \{(n, m) \mid n \text{ divide } m \text{ e } n \neq m\}$.
3. $\mathcal{C} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, P^{\mathcal{C}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{C}}$ è la relazione $\subset$.

Giustificare le proprie risposte.

Esercizio 5

6 punti

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k + 1 = n(2n + 3).$$