Logica Matematica
6.4 – Formalizzazione

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Cosa vuol dire formalizzare?

Formalizzare significa tradurre frasi della lingua naturale o del gergo matematico in espressioni di un linguaggio semplificato, schematico e dalla sintassi precisa (che possa poi venir analizzato in maniera astratta per controllare la correttezza dei ragionamenti fatti).

La logica del prim'ordine è stata introdotta proprio per formalizzare il ragionamento matematico. È in grado di esprimere gran parte delle affermazioni e dei ragionamenti (anche se non cattura, ad esempio, relazioni temporali come "prima" e "dopo" e altri costrutti più complicati: per questi sono stati introdotti altri tipi di logica, come la logica temporale e così via).

La formalizzazione nella logica del prim'ordine è l'operazione "inversa" di quella di interpretazione di formule in una data struttura:

- quando si *interpreta*, si parte da una formula in un linguaggio artificiale (nel nostro caso, quello della logica del prim'ordine) e la si "traduce" in una frase di senso compiuto che afferma qualcosa a riguardo della struttura in questione e dei suoi elementi;
- viceversa, quando si *formalizza* si parte da una frase di senso compiuto riguardante una struttura o i suoi elementi (solitamente espressa nel linguaggio naturale, ovvero, nel nostro caso, in italiano) e la si "trasforma" in un'opportuna formula che esprima la stessa cosa nel linguaggio artificiale della logica.

La formalizzazione di frasi e ragionamenti è fondamentale per:

1. evidenziare la correttezza dei passaggi logici fatti in un ragionamento, prescindendo dal significato concreto delle parole usate (relazione di **conseguenza logica**);

2. evitare ambiguità e chiarire il significato di ciò che si sta dicendo.

In effetti, uno dei “difetti” dei linguaggi naturali è quello di permettere numerose ambiguità e ridondanze, che noi invece vorremmo evitare nei nostri ragionamenti.

> La vecchia porta la sbarra.

è ambigua perché non è chiara la sua struttura sintattica: se “vecchia” sia un aggettivo sostantivato o un aggettivo, se “porta” e “sbarra” siano sostantivi (nomi) o forme verbali.

> Giovanni vede Mario che è malato e piange.

è ambigua per ragioni di scansione, occorrono delimitatori come le virgole.

> Ogni uomo ha ballato con qualche donna.

può voler dire:

1. Per ogni uomo c’è una donna con la quale ha ballato.
2. C’è una donna con la quale ogni uomo ha ballato.

Altri esempi di frasi in italiano con più interpretazioni possibili sono:

- Luigi ha visto un uomo nel parco con il telescopio.
- Gianni e Maria sono sposati con due gemelli.
- "Se l'uomo sapesse realmente il valore che ha una donna andrebbe a quattro zampe alla sua ricerca." (Julio Cortázar, 1914–1984)
- Da un cartello: "La macelleria resta aperta la domenica solo per i polli."
- Da un altro cartello: "Si vendono impermeabili per bambini di gomma."
- Titolo di giornale: "Cinquecento contro un albero: tutti morti."

Per evitare ambiguità bisogna fare attenzione a chiarire diversi aspetti: qual'è l'universo del discorso (ovvero l'insieme degli oggetti di cui stiamo parlando), quali sono le proprietà/relazioni coinvolte, quali sono le eventuali "funzioni" (essere il padre di ...) e individuare quegli elementi specifici del discorso che hanno un nome proprio. Bisogna poi utilizzare punteggiatura e parentesi in modo da evitare ambiguità dovute alla scansione e congiunzioni ed altre particelle che permettano di formare frasi composte a partire da frasi semplici.

Per chiarire la struttura della frase bisogna allora introdurre simboli astratti per ciascuno degli oggetti precedenti: simboli di relazione, simboli di funzione, simboli di costante, parentesi, costanti logiche. Abbiamo poi bisogno di variabili, che servono a formalizzare espressioni come "una cosa", "uno" o, più in generale, un generico oggetto dell'universo del discorso: "una persona" se il discorso si riferisce a esseri umani, "un numero" se il discorso si riferisce ai numeri e così via.

Questo è proprio ciò che abbiamo fatto introducendo la sintassi e la semantica della logica del prim'ordine!

Alcuni esempi

Se uno ha un amico, è fortunato.

si può formalizzare con:

$$\forall x\,(\exists y P(y,x) \to Q(x))$$

dove $P(y,x)$ significa "y è amico di x" e $Q(x)$ significa "x è fortunato".

Giovanni dorme.

si può formalizzare con:

$$P(c)$$

dove $P(x)$ significa "x dorme" e c è un simbolo di costante, che, in questo caso, denota una persona specifica, ovvero Giovanni.

Uno che segue il corso di Logica si addormenta.

è una frase ambigua!

- Io, come professore di Logica, spero che voglia solo dire che c'è uno studente che tende ad addormentarsi,
- ma magari gli studenti intendono che tutti si addormentano sempre.

Nel primo caso la frase la si formalizza così

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

(dove $P(x)$ significa "x è uno studente di logica" e $Q(x)$ significa "x dorme"), nel secondo caso la si formalizza così

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))\,.$$

Come si vede, formalizzando l'ambiguità scompare: le formule della logica del prim'ordine non permettono alcuna ambiguità, quindi quando formalizziamo la frase dobbiamo prima scegliere un significato preciso per poter poi scrivere la formula corrispondente...

Supponiamo di voler formalizzare la frase

> Ogni numero naturale diverso da 0 si può scrivere come somma di due numeri naturali distinti.

Dobbiamo innanzitutto specificare l'universo del discorso: se stabiliamo che l'universo del discorso sono, ad esempio, i numeri reali, allora ci serve un predicato unario $N(x)$ che stia per "x è un numero naturale", mentre se l'universo del discorso sono proprio i numeri naturali allora non è necessario avere tale predicato perché stiamo assumendo che tutti gli oggetti di cui parliamo saranno numeri naturali.

Utilizzando il linguaggio $L = \{f, c\}$ con un simbolo di funzione binario f per la somma e un simbolo di costante c per il numero 0, per formalizzare la frase in $\mathbb{R}$ scriveremo allora

$$\forall x(N(x) \wedge \neg(x = c) \to \exists y \exists z(N(y) \wedge N(z) \wedge \neg(y = z) \wedge f(y, z) = x),$$

mentre se formalizziamo in $\mathbb{N}$ scriveremo più semplicemente

$$\forall x(\neg(x = c) \to \exists y \exists z(\neg(y = z) \wedge f(y, z) = x).$$

Per formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

Tutti i numeri dispari sono maggiori di 0.

bisogna sapere (oltre all'universo del discorso, che in questo caso abbiamo stabilito essere $\mathbb{N}$) quale linguaggio utilizzare.

Se ad esempio abbiamo a disposizione un simbolo di relazione unario D interpretato come "essere un numero dispari", un simbolo di relazione binario R interpretato come $<$ e un simbolo di costante c interpretato come lo 0, allora la formalizzazione sarà

$$\forall x(D(x) \rightarrow R(c, x)).$$

Se invece oltre ai simboli R e c come sopra abbiamo a disposizione un simbolo di funzione binario f interpretato come la somma (ma non il simbolo D), allora la formalizzazione sarà

$$\forall x(\neg \exists y(x = f(y, y)) \rightarrow R(c, x)).$$

Come abbiamo visto negli esempi precedenti, per poter formalizzare una frase dobbiamo sapere:

1. qual'è l'universo del discorso, ovvero l'insieme degli oggetti di cui si sta parlando e che sono i possibili valori delle variabili;
2. il linguaggio da utilizzare, ovvero l'insieme dei simboli di funzione, relazione e costante (con relativa arietà ove necessario) che potranno essere utilizzati nello scrivere la formula;
3. come i simboli del linguaggio vadano interpretati all'interno dell'universo del discorso.

Dal punto di vista tecnico, il punto 2 dice che bisogna aver stabilito il linguaggio del prim'ordine $L = \mathrm{Func} \cup \mathrm{Rel} \cup \mathrm{Const}$ che vogliamo utilizzare.

I punti 1 e 3 dicono invece che dobbiamo sapere in quale L-struttura la formalizzazione (ovvero la L-formula) che scriveremo andrà interpretata: più precisamente, 1 chiede di stabilire il dominio di tale struttura, mentre 3 chiede di stabilire le interpretazioni in tale struttura dei simboli del linguaggio L scelto in 2.

Quindi quando si parla di "formalizzare una frase", si dovrebbe più precisamente parlare di

> "formalizzare la frase in una data L-struttura $\mathcal{A}$, dove L è il linguaggio del prim'ordine assegnato".

Cosa vuol dire formalizzare?

Formalizzare significa scrivere una formula nel linguaggio L che, una volta interpretata in $\mathcal{A}$, abbia lo stesso significato della frase data.

Un esempio

Se viene chiesto di formalizzare in $\mathbb{Q}$ la frase

> Dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un terzo numero compreso tra i due.

utilizzando il linguaggio formato da un solo simbolo di relazione binario R interpretato come $<$, significa che dobbiamo scrivere una L-formula φ, dove $L = \{R\}$, che una volta interpretata nella L-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ abbia lo stesso significato della frase assegnata.

Quindi la risposta sarà, ad esempio, la formula φ seguente:

$$\forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))).$$

In effetti l'interpretazione di φ in $\mathcal{A}$ risulta essere

Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, se $x < y$ allora esiste $z \in \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$.

che è proprio ciò che volevamo esprimere.

Alcune osservazioni

Il fatto che la frase proposta sia vera o meno nella struttura assegnata non c'entra nulla: la formalizzazione è solo un'operazione di "traduzione" dal linguaggio naturale a quello formale (e prescinde quindi da ogni altra considerazione sulla frase stessa).

Ad esempio, la frase precedente

> Dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un terzo numero compreso tra i due.

è falsa per i numeri naturali, ma ciò nonostante possiamo comunque formalizzarla nella L-struttura $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ (dove $L = \{R\}$) con la formula

$$\forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (R(x,z) \land R(z,y))).$$

Bisogna inoltre ricordare che, come detto, per formalizzare una frase bisogna che sia stato assegnato uno specifico linguaggio L (e una L-struttura in cui interpretare la formula): questo vuol anche dire che una volta scelto il linguaggio L,

solo i simboli di L potranno essere utilizzati per scrivere la formula
(oltre ovviamente a costanti logiche, parentesi e uguaglianza).

Non si possono invece utilizzare altri simboli di relazione, funzione o costante, anche quando questa sembrerebbe la cosa più "naturale" da fare.

Ad esempio, supponiamo che ci venga richiesto di formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

0 è il più piccolo numero naturale.

utilizzando il linguaggio costituito da un simbolo di funzione binario f, interpretato come somma, e da un simbolo di costante c, interpretato come 0. Siccome la frase parla di "ordine" tra i numeri naturali (piccolo/grande si riferiscono appunto all'ordine $\leq$ su $\mathbb{N}$), si potrebbe essere tentati di formalizzare la frase così:

$$\forall x(R(c, x)),$$

dove R è un simbolo di relazione binario da interpretare come $\leq$.

Questa soluzione non è però corretta, perché R non è presente nel linguaggio assegnato: solo i simboli f e c possono essere utilizzati per formalizzare la frase. Una soluzione corretta è invece

$$\forall x \exists y(x = f(c, y)).$$

Non vi è mai una soluzione unica ad un problema di formalizzazione: si vuole infatti trovare una formula che, una volta interpretata nella struttura, abbia lo stesso significato della frase data, ma vi possono essere molte formule tra loro equivalenti che esprimono la stessa cosa (e che sono quindi tutte formalizzazioni corrette).

Ad esempio, per formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

Il quadrato di un numero è sempre maggiore o uguale a 0.

nel linguaggio costituito da un simbolo di relazione binario R interpretato come $\leq$, un simbolo di funzione binario f interpretato come prodotto ed un simbolo di costante c interpretato come 0, possiamo equivalentemente scrivere

$$\forall x(\exists y(x = f(y,y)) \to R(c,x))$$

(ovvero: "*Per ogni $x \in \mathbb{R}$, se x è il quadrato di qualche numero allora $0 \leq x$*"), oppure

$$\forall x(R(c, f(x,x)))$$

(ovvero: "*Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il suo quadrato è maggiore o uguale a 0*").

Ci sono casi in cui la formalizzazione sarà una formula contenente variabili libere, e altri in cui la formalizzazione sarà un enunciato.

- Se la frase da formalizzare contiene *esplicitamente* (dei costrutti che si comportano come) delle variabili libere, ovvero se la frase serve ad affermare che uno più oggetti (che non siano costanti!) hanno determinate caratteristiche, allora la sua formalizzazione sarà una formula contenente variabili libere — una per ciascuna di quelle che compaiono nella frase originale.
- Se la frase è un'affermazione generale in cui tutte le possibili variabili sono quantificate (esplicitamente o implicitamente), allora la sua formalizzazione sarà un enunciato, ovvero una formula priva di variabili libere.

Esempio

La frase

x è un numero primo.

contiene esplicitamente una variabile, ovvero x, che non è "quantificata" nella frase stessa. La sua formalizzazione sarà dunque una formula contenente una variabile libera, in questo caso x stessa. Ad esempio, per formalizzare tale frase nella L-struttura $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$, dove $L = \{f, c\}$ con f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante, scriveremo

$$\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z (f(y, z) = x \rightarrow y = x \vee z = x).$$

(Si osservi che nella formula precedente x è libera, mentre tutte le altre variabili sono vincolate.)

Esempio

Anche nella frase

Esiste un x che è un numero primo.

compare la variabile x: tuttavia, in questo caso essa è vincolata dall'espressione "Esiste un...". Di conseguenza, nella sua formalizzazione la x non comparirà più come variabile libera, ma sarà invece vincolata da un quantificatore (in questo caso, un quantificatore esistenziale). Una sua possibile formalizzazione (continuando a utilizzare lo stesso linguaggio L e la stessa L-struttura dell'esempio precedente) è

$$\exists x(\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z(f(y, z) = x \to y = x \vee z = x)).$$

(Si osservi che in questo caso anche x risulta vincolata dal quantificatore $\exists$.)

Attenzione!

Alcune volte la quantificazione può essere solo implicita nella frase...

Ad esempio, nella frase

Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari.

è evidente che c'è una quantificazione universale sui numeri considerati, mentre nella frase

I multipli di 4 sono anche multipli di 2.

non c'è nessuna quantificazione esplicita; tuttavia il suo significato indica chiaramente che si sta sottintendendo una quantificazione universale, infatti si intende dire che

Tutti i numeri che sono multipli di 4 sono anche multipli di 2.

Esempio

Supponiamo di voler formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

Il quadrato di un numero pari è pari.

utilizzando il linguaggio costituito da un simbolo di funzione binario f interpretato come il prodotto e un simbolo di relazione unario P interpretato come "essere pari". Nella frase non vi è nessuna quantificazione eplicita ("per ogni", "tutti", "esiste", "per qualche", ...), tuttavia il significato della frase è

Per ogni numero, se è pari allora anche il suo quadrato è pari.

Allora la frase si può formalizzare così

$$\forall x(P(x) \to P(f(x,x))).$$

Quantificatori limitati

A volte in una frase le quantificazioni possono essere limitate solo agli elementi dell'universo del discorso che hanno una certa proprietà.

Ad esempio, supponiamo che il nostro universo del discorso sia $\mathbb{R}$ e consideriamo la frase

> Tutti i numeri positivi sono il quadrato di qualche numero.

L'espressione "Tutti i numeri..." esprime chiaramente una quantificazione universale, tuttavia l'affermazione non riguarda veramente tutti i numeri reali, ma solo quello che hanno una determinata proprietà (nel nostro caso: "essere numeri positivi").

Dunque in questo caso il quantificatore universale è limitato ai soli numeri positivi.

La frase

Tutti i numeri positivi sono il quadrato di qualche numero.

potrebbe dunque essere riformulata come

Per ogni numero reale, se è positivo allora è il quadrato di qualche numero.

Quindi se utilizziamo un linguaggio con un simbolo di relazione unario P interpretato come "essere un numero positivo" e un simbolo di funzione binario f interpretato come il prodotto, la frase si formalizza così

$$\forall x(P(x) \to \exists y(x = f(y, y))).$$

Similmente, nella frase

> Esiste un numero primo che è pari.

il quantificatore esistenziale è limitato ai soli numeri primi. La frase può essere riformulata come

> Esiste un numero che è primo ed è pari.

Una formalizzazione in $\mathbb{N}$ della frase data utilizzando il linguaggio costituito da un simbolo di relazione unario P interpretato come “essere primo” ed un simbolo di relazione unario Q interpretato come “essere pari” è dunque

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Riassumendo: l'espressione

"Per ogni x che soddifa $P(x)$ vale che ..."

si formalizza con

$$\forall x(P(x) \rightarrow \dots)$$

mentre l'espressione

"Esiste un x che soddisfa $P(x)$ tale che ..."

si formalizza con

$$\exists x(P(x) \wedge \dots)$$

Si noti che con i quantificatori universali limitati si usa l'implicazione, mentre con i quantificatori esistenziali limitati si usa la congiunzione: questa non è una convenzione, ma deriva dal fatto che questo è il modo corretto di esprimere il significato di una frase che contenga un quantificatore limitato.

Esempio

Consideriamo un linguaggio che contenga un predicato unario $P(x)$ per "x è pari" e un predicato unario $Q(x)$ per "x è divisibile per 2".

"Ogni numero pari è divisibile per 2"

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

"Esiste un numero pari divisibile per 2"

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

Alcune convenzioni e notazioni

Funzioni binarie

- Se f è un simbolo di funzione binaria, si usa solitamente la notazione infissa $t_1\, f\, t_2$ invece di quella prefissa $f(t_1, t_2)$. Ad esempio scriveremo $t_1 + t_2$ e $t_1 \cdot t_2$ al posto di $+(t_1, t_2)$ e $\cdot(t_1, t_2)$.
- Nell'espressione $t_1\ f\ \dots\ f\ t_n$ si intende sempre che si associa a destra, cioè $t_1\ f\ (t_2\ f\ (\dots(t_{n-1}\ f\ t_n)\dots))$. Ad esempio, $t_1 + t_2 + t_3$ sta per $t_1 + (t_2 + t_3)$ e $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ sta per $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$.

Predicati binari

- $t_1 \neq t_2$ è un'abbreviazione di $\neg(t_1 = t_2)$.
- Se P è un simbolo di relazione binario spesso useremo la notazione infissa $t_1\ P\ t_2$ al posto della notazione prefissa $P(t_1, t_2)$. Ad esempio, scriveremo $s < t$ invece di $<(s, t)$.
- Abbrevieremo formule del tipo $x < z \wedge z < y$ con $x < z < y$.

Infine, per semplificare un po' la scrittura delle formule negli esercizi di formalizzazione

> quando avremo a che fare con funzioni/relazioni/costanti che in matematica hanno già un simbolo ben definito che le rappresenta, utilizzeremo sempre tale simbolo con la sua interpretazione naturale.

In altre parole: per i simboli di uso comune in matematica, identifichiamo il simbolo con il suo significato usuale.

Quando scriviamo ad esempio

Formalizzare in $\mathbb{R}$ la frase

Non esiste un numero che sia più grande di tutti.

utilizzando il linguaggio contenente solo il simbolo $\leq$ (interpretato nella maniera usuale).

intendiamo dire che:

- il linguaggio da utilizzare è $L = \{\leq\}$, dove $\leq$ è un simbolo di relazione binario;
- l'interpretazione del simbolo $\leq$ nella struttura assegnata è proprio la relazione di "minore o uguale", ovvero la L-struttura in cui formalizzare la frase è $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Una possibile soluzione all'esercizio proposto (utilizzando tutte le convenzioni e notazioni esposte) è dunque

$$\neg \exists x \forall y (y \leq x).$$

Alcuni esempi

Esempio

La frase

"Dati due numeri diversi tra loro, esiste un numero che è propriamente compreso tra i due numeri dati"

si formalizza in $\mathbb{N}$ utilizzando un linguaggio contenente un simbolo per l'ordine $<$ con

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z (x < z < y \vee y < z < x)).$$

Esempio

Sia L il linguaggio contente un simbolo per la moltiplicazione $\cdot$, uno per l'ordine stretto $<$ e un simbolo di costante 0 (interpretato nella maniera usuale). Allora la frase

"Ogni numero positivo ha una radice quadrata"

si formalizza in $\mathbb{R}$ utilizzando il linguaggio L come segue:

$$\forall x(0 < x \to \exists y(x = y \cdot y))$$

Esempio

Formalizziamo in $\mathbb{N}$ l'affermazione

"3 è dispari"

utilizzando il linguaggio contenente solo il simbolo di relazione binario $x \mid y$ per "y è divisibile per x" e i simboli di costante 2 e 3.

Il predicato "dispari" si può definire come "non pari" e quindi

$$\neg\,(2 \mid 3).$$

Utilizzando invece il linguaggio contenente i simboli $+, \cdot, 1, 2, 3$ (con il loro significato usuale) avremmo potuto scrivere

$$\exists y(3 = 2 \cdot y + 1).$$

(Si ricordi che un numero è dispari se e solo se è della forma $2 \cdot z + 1$.)

Esempio

Consideriamo il linguaggio formato da

- $x \mid y \rightsquigarrow$ "y è divisibile per x"
- simboli $+$, $<$ e 1 con il loro significato usuale,

Utilizzando tale linguaggio, formalizziamo in $\mathbb{N}$ la frase

"Ogni primo maggiore di 2 è dispari"

Attenzione! "2" non è un simbolo del linguaggio, quindi dobbiamo rendere il numero 2 con il termine $1 + 1$.

$$\forall x \big(1 + 1 < x \wedge \forall z (z \mid x \rightarrow z = 1 \vee z = x) \rightarrow \neg((1 + 1) \mid x)\big)$$

Esempio

Consideriamo il linguaggio formato dai simboli seguenti:

- $x \mid y \rightsquigarrow$, interpretato come "$x$ divide y";
- i simboli $+$, $<$ e 1 con il loro significato usuale.

Utilizzando questo linguaggio, formalizziamo in $\mathbb{N}$ l'affermazione

"Esistono due numeri primi consecutivi"

Procediamo in due passi: utilizzando l'abbreviazione $\mathsf{pr}(x)$ per "x è primo", incominciamo a formalizzare (parzialmente) la frase, riservandoci di sostituire in seguito $\mathsf{pr}(x)$ con la sua scrittura corretta.
Si ha allora

$$\exists x \exists y (x = y + 1 \wedge \mathsf{pr}(x) \wedge \mathsf{pr}(y))$$

oppure più semplicemente

$$\exists x (\mathsf{pr}(x) \wedge \mathsf{pr}(x + 1))$$

continua...

Esempio (continua)

Ora formalizziamo

"y è un numero primo"

ricordando che un numero è primo se e solo se è maggiore di 1 ed è divisibile solo per 1 e per se stesso.

$$y > 1 \land \forall z (z \mid y \to z = 1 \lor z = y)$$

Infine sostituiamo $\mathrm{pr}(x)$ e $\mathrm{pr}(x+1)$ in $\exists x(\mathrm{pr}(x) \land \mathrm{pr}(x+1))$ con la formula precedente (per gli opportuni y)

$$\exists x \big(x > 1 \land \forall z (z \mid x \to z = 1 \lor z = x) \\ \land \forall z (z \mid x+1 \to z = 1 \lor z = x+1) \big)$$

Non è necessario aggiungere $x + 1 > 1$ perché segue già da $x > 1$.

Alcune espressioni comuni

In matematica vi sono alcune espressioni ricorrenti, ma forse meno note, di cui è bene chiarire significato.

Alcune di esse sembrano richiedere l'introduzione di nuovi quantificatori ("Esiste un unico x tale che...", "Esistono almeno tre oggetti tali che...", "Esistono al più due oggetti tali che..." e così via) oppure di altre costanti logiche. Vedremo che questo non è necessario, in quanto tutte queste espressioni si possono già formalizzare nella logica del prim'ordine che stiamo studiando.

Presentiamo qui di seguito una carrellata delle più importanti tra tali espressioni matematiche, inclusi alcuni esempi.

L'espressione

"Esiste un unico x tale che $P(x)$"

si formalizza come

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$$

o anche

$$\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$$

Similmente, se c è un simbolo di costante l'espressione

"c è l'unico per cui vale $P(x)$"

si formalizza con

$$P(c) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow x = c)$$

Esempio

Consideriamo un linguaggio con un simbolo di relazione unario $\mathsf{pr}(x)$ per "x è un numero primo", un simbolo di relazione unario $P(x)$ per "x è pari" e il simbolo di costante 2 (col significato usuale).

"Esiste un unico numero primo pari"

$$\exists x(\mathsf{pr}(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(\mathsf{pr}(y) \wedge P(y) \rightarrow x = y))$$

"2 è l'unico numero primo pari"

$$\mathsf{pr}(2) \wedge P(2) \wedge \forall x(\mathsf{pr}(x) \wedge P(x) \rightarrow x = 2)$$

L'espressione

"Esistono *almeno* n cose per cui vale P"

si formalizza con

$$\begin{aligned}\exists x_1 \dots \exists x_n \big(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \\ \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n) \big)\end{aligned}$$

Esempio

Consideriamo un linguaggio che contiene solo il simbolo di relazione unario $\mathsf{pr}(x)$ per "x è un numero primo".

La frase

"Esistono almeno 3 numeri primi"

si formalizza in $\mathbb{N}$ con

$$\exists x \exists y \exists z \big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \mathsf{pr}(x) \wedge \mathsf{pr}(y) \wedge \mathsf{pr}(z) \big)$$

L'espressione

"Esistono *al più* n cose per cui vale P"

è la negazione di

"Esistono almeno $n+1$ cose per cui vale P"

Esempio

Consideriamo il linguaggio che contiene solo il simbolo $\cdot$ per la moltiplicazione.

"Ogni numero è il quadrato di al più due numeri"

$$\forall x \neg \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3 \\ \wedge x = y_1 \cdot y_1 \wedge x = y_2 \cdot y_2 \wedge x = y_3 \cdot y_3)$$

oppure

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 (x = y_1 \cdot y_1 \wedge x = y_2 \cdot y_2 \wedge x = y_3 \cdot y_3 \\ \rightarrow y_1 = y_2 \vee y_1 = y_3 \vee y_2 = y_3)$$

L'espressione

"Esistono *esattamente* n cose per cui vale P"

è resa dalla congiunzione

"Esistono n cose per cui vale P e non esistono $n + 1$ cose per cui vale P"

Esempio

Consideriamo il linguaggio contenente un simbolo di relazione unario $\mathrm{pr}(x)$ per "x è un numero primo", oltre ai simboli $<$ e 4 interpretati nella maniera usuale.

"Esistono esattamente due numeri primi minori di 4"

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge \mathrm{pr}(x) \wedge \mathrm{pr}(y) \wedge x < 4 \wedge y < 4)$$
$$\wedge \neg \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \mathrm{pr}(x) \wedge \mathrm{pr}(y) \wedge \mathrm{pr}(z) \wedge x < 4 \wedge y < 4 \wedge z < 4)$$

oppure

$$\exists x \exists y \big(x \neq y \wedge \mathrm{pr}(x) \wedge \mathrm{pr}(y) \wedge x < 4 \wedge y < 4$$
$$\wedge \forall z (\mathrm{pr}(z) \wedge z < 4 \rightarrow z = x \vee z = y) \big)$$

Consideriamo l'espressione

"Esistono numeri arbitrariamente grandi per cui vale P"

La locuzione "arbitrariamente grandi" o "grandi quanto si vuole" significa che comunque si dia un numero, ne esiste uno più grande con la proprietà P in oggetto. Quindi in un linguaggio con un simbolo $<$ per l'ordine si formalizza con

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y))$$

Esempio

Consideriamo un linguaggio con un simbolo $\cdot$ per la moltiplicazione e un simbolo per l'ordine stretto $<$.

"Esistono numeri quadrati arbitrariamente grandi."

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \exists z (y = z \cdot z))$$

Nei numeri naturali,

"Esistono infiniti numeri per cui vale P"

è equivalente a

"Esistono numeri arbitrariamente grandi per cui vale P"

e si formalizza quindi come prima.

Esempio

Consideriamo un linguaggio con un predicato $\mathsf{pr}(x)$ per "x è un numero primo" e un simbolo per l'ordine stretto $<$.

"Esistono infiniti numeri primi."

$$\forall x \exists y (x < y \wedge \mathsf{pr}(y))$$

Consideriamo l'espressione

"Per ogni numero sufficientemente grande vale P"

La locuzione "sufficientemente grande" significa che esiste un numero tale che tutti i numeri più grandi di esso hanno la proprietà P in oggetto. Quindi in un linguaggio con un simbolo $<$ per l'ordine si formalizza con

$$\exists x \forall y (x < y \to P(y))$$

Esempio

Consideriamo un linguaggio con un simbolo $+$ per la somma, un simbolo $<$ per l'ordine stretto, e la costante 0 (interpretata del modo usuale).

"Tutti i numeri sufficientemente grandi
sono somma di tre numeri positivi."

$$\exists x \forall y (x < y \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (0 < z_1 \wedge 0 < z_2 \wedge 0 < z_3 \wedge y = z_1 + z_2 + z_3))$$

Nell'espressione

“Tra due elementi che godono della proprietà P c'è un elemento che gode della proprietà Q, e viceversa”

la parola “viceversa” significa che “tra due elementi che godono della proprietà Q c'è un elemento che gode della proprietà P”. In un linguaggio con due predicati unari P e Q e un simbolo $<$ per l'ordinamento si formalizza con

$$\forall x \forall y\,(x < y \land P(x) \land P(y) \rightarrow \exists z\,(x < z < y \land Q(z))) \\ \land \forall x \forall y\,(x < y \land Q(x) \land Q(y) \rightarrow \exists z\,(x < z < y \land P(z)))$$

Esempio

Consideriamo un linguaggio contenente un simbolo di relazione unario $R(x)$ per "x è razionale" e il simbolo $<$ (interpretato nella maniera usuale).

"Tra due razionali c'è un irrazionale, e viceversa"

$$\forall x \forall y \big(R(x) \wedge R(y) \wedge x < y \to \exists z (x < z < y \wedge \neg R(z)) \big)$$
$$\wedge \forall x \forall y \big(\neg R(x) \wedge \neg R(y) \wedge x < y \to \exists z (x < z < y \wedge R(z)) \big)$$

Altri esempi

Esempio

Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $\cdot$, $<$ e 10 (interpretati nella maniera usuale), formalizziamo in $\mathbb{N}$ l'affermazione:

"Ci sono almeno due numeri quadrati minori di 10".

L'espressione "x è un numero quadrato" significa che x è il quadrato di qualche numero, e si formalizza come $\exists u(x = u \cdot u)$. Quindi

$$\exists x \exists y \big(x \neq y \wedge x < 10 \wedge y < 10 \wedge \exists u(x = u \cdot u) \wedge \exists u(y = u \cdot u)\big)$$

Esempio

Supponendo che l'universo del discorso sia costituito da tutti i punti e le rette del piano, formalizziamo la frase

"Per due punti distinti passa una e una sola retta"

utilizzando il linguaggio contenente i seguenti predicati:

- $P(x) \rightsquigarrow$ "x è un punto"
- $R(x) \rightsquigarrow$ "x è una retta"
- $Q(x, y) \rightsquigarrow$ "y passa per x"

$$\forall x \forall y \big(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \rightarrow \exists z (R(z) \wedge Q(x, z) \wedge Q(y, z) \\ \wedge \forall u (R(u) \wedge Q(x, u) \wedge Q(y, u) \rightarrow z = u))\big)$$

Esempio

Formalizziamo in $\mathbb{N}$ l'affermazione

"Esistono infiniti numeri primi"

utilizzando solo il simbolo $<$ di minore stretto e il simbolo di relazione binario $x \mid y$ per "y è divisibile per x".

Introduciamo temporaneamente l'abbreviazione $\mathsf{pr}(y)$ per "y è un numero primo":

$$\forall x \exists y \, (x < y \wedge \mathsf{pr}(y))$$

Ora trasformiamo $\mathsf{pr}(y)$ in

$$1 < y \wedge \forall z \, (z \mid y \rightarrow z = 1 \vee z = y)$$

ottenendo

$$\forall x \exists y \, (x < y \wedge 1 < y \wedge \forall z \, (z \mid y \rightarrow z = 1 \vee z = y)) \, .$$

continua...

Esempio (continua)

Infine ci sbarazziamo della costante "1" (che non appartiene al linguaggio considerato) osservando che 1 è l'unico numero naturale che divide ogni numero naturale, cioè esiste un unico u tale che $\forall w(u \mid w)$. Si ottiene così

$$\exists u\Big(\forall w(u \mid w) \wedge \forall x \exists y\big(x < y \wedge u < y \wedge \forall z\,(z \mid y \rightarrow z = u \vee z = y)\big)\Big)$$

Poiché $z \mid y$ se e solo se $\exists v\,(v \cdot z = y)$, è possibile anche formalizzare il tutto usando solo la relazione d'ordine e il prodotto.

Attenzione: studente avvisato . . .

Condizione sufficiente, ma non necessaria, per essere bocciati (più e più volte!!) al corso di Logica è scrivere degli obbrobri che non sono formule.

Galleria degli errori

Galleria degli orrori

Galleria degli orrori

Formalizzare (in $\mathbb{N}$) la seguente frase:

Il prodotto di due numeri è dispari se e soltanto se sono entrambi dispari

usando i simboli $\cdot$, $=$ e il simbolo di relazione unario P per "essere un numero pari". Ecco cosa è stato scritto durante gli esami da alcuni studenti:

- $P(x) =$ essere un numero pari.
  $\exists x \exists y\, (x \cdot y \neq P(x)) \leftrightarrow (x \neq P(x) \wedge y \neq P(x))$.
- $\exists z \forall x \forall y\, (\neg P(z) = \neg P(x) \cdot P(y))$.
- $\forall x \forall y\, (x \cdot y = z) \rightarrow \exists z\, (z \neq P) \leftrightarrow \exists x \exists y\, (x \neq P, y \neq P)$.
- $\forall x \forall y \exists z\, (\neg P(x) \cdot \neg P(y) = \neg P(z))$.
- $\forall P(x,y) \exists z\, (z = x + y \wedge \forall k\, (k = x + y \rightarrow k = z))$.
- $\forall x \forall y (P(x) \cdot P(y) = P(z) \rightarrow \neg P(z) \leftrightarrow (\neg P(x) \wedge \neg P(y))$.
- $\exists x \exists y\, ((x \cdot y) = \neg P(x \cdot y)) \leftrightarrow \forall x \forall y\, ((\neg P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x,y))$.
- $\forall x \forall y \exists z\, (z = x \cdot y \Leftrightarrow x = z \wedge y = z) \wedge \neg \exists P(p)\, (p = x \vee p = y)$.

Attenzione: studente avvisato . . .

Condizione sufficiente, ma non necessaria, per essere bocciati (più e più volte!!) al corso di Logica è scrivere degli obbrobri che non sono formule.