

Linguaggi Formali e Traduttori
Esercizi – grammatiche libere dal contesto, automi a pila
7 novembre 2018

1. Scrivere una grammatica libera dal contesto per ognuno dei seguenti insiemi:
 - a) l'insieme $\{a^i b^j \mid i \neq j\}$, cioè l'insieme delle stringhe in cui il numero di a è diverso dal numero di b.
 - b) l'insieme $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ oppure } j \neq k\}$, cioè l'insieme delle stringhe in cui il numero di a è diverso dal numero di b o il numero di b è diverso dal numero di c.
 - c) l'insieme delle stringhe con un numero uguale di 0 e di 1.
 - d) l'insieme delle stringhe con un numero di 0 doppio rispetto al numero di 1.
 - e) l'insieme delle stringhe di parentesi tonde e quadre bilanciate. Ad esempio $[[([[(())])]]]$ è bilanciata, mentre non lo è la stringa $[[] ()]$.

2. La seguente grammatica è ambigua $S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$. Mostrare che la stringa "aab" ha:
 - a. due alberi sintattici
 - b. due derivazioni a sinistra
 - c. due derivazioni a destra.

3. La seguente grammatica genera espressioni in notazione prefissa:
$$E \rightarrow +EE \mid *EE \mid -EE \mid x \mid y$$
 - a) trovare una derivazione a sinistra e una derivazione a destra per la stringa "+ * x y- x y"
 - b) la grammatica è ambigua? Motivare la risposta.

4. L'automa a pila $P = (\{p,q\}, \{0,1\}, \{X,Z_0\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ ha la seguente funzione di transizione:

| | |
|--|--|
| $\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$ | $\delta(p, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$ |
| $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$ | $\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$ |
| $\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$ | $\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \varepsilon)\}$ |
| $\delta(q, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$ | |

A partire dalla descrizione istantanea iniziale (q, w, Z_0) , mostrare tutte le descrizioni istantanee raggiungibili sugli input:

 - a. 01 b. 0011 c. 010

5. Per ognuno dei seguenti linguaggi definire un automa a pila, che lo accetti per stack vuoto:
 - a. Insieme delle stringhe di 0 e 1 tali che nessun prefisso abbia più 1 che 0.
 - b. Insieme delle stringhe di 0 e 1 con lo stesso numero di 0 e di 1.
 - c. Insieme delle stringhe di 0 e 1 in cui gli 0 precedono gli 1 e il numero di 0 è doppio del numero di 1 ($\{0^{2n}1^n \mid n > 0\}$).

6. L'automa P ha la seguente funzione di transizione (le parentesi graffe sono state omesse in quanto la funzione di transizione ha un solo valore per ogni elemento del dominio:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AAZ_0)$$

$$\delta(q_0, b, Z_0) = (q_2, BZ_0)$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = (f, \varepsilon)$$

$$\delta(q_1, a, A) = (q_1, AAA)$$

$$\delta(q_1, b, A) = (q_1, \varepsilon)$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$$

$$\delta(q_2, a, B) = (q_3, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, b, B) = (q_2, BB)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0)$$

$$\delta(q_3, \varepsilon, B) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = (q_1, AZ_0)$$

- 1) scrivere una traccia d'esecuzione (cioè una sequenza di descrizioni istantanee) per dimostrare che la stringa "bab" è in L(P);
- 2) scrivere una traccia d'esecuzione per dimostrare che "abb" è in L(P);
- 3) scrivere il contenuto dello stack dopo che P ha letto b^7a^4 ;

7. Per ognuno dei seguenti linguaggi liberi dal contesto definire un automa push-down che lo accetti per stack vuoto.

- a) $\{a^n b^m c^{2(n+m)} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- b) $\{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ oppure } j = 2k\}$
- c) $\{0^n 1^m 0^n \mid n, m > 0\}$
- d) $\{0^n 1^m \mid 0 < n \leq m\}$
- e) $\{0^n 1^m \mid n \geq m > 0\}$
- f) $\{0^n 1^m \mid n \leq m \leq 2n\}$

8. Si considerino i due linguaggi:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

- a) dimostrare che sono entrambi liberi costruendo una grammatica per ognuno;
- b) costruire una grammatica per la loro unione e la concatenazione;
- c) costruire una grammatica per la chiusura di Kleene di L_1 , di L_2 e della loro unione;
- d) $L_1 \cap L_2$ è un linguaggio context-free? Giustificare la risposta.

9. Fornire una grammatica lineare destra per i linguaggi denotati dalle seguenti espressioni regolari:

- a) $a^+ b c^+$
- b) $(a \mid b)^* a b b$
- c) $(a b^* \mid c)^* a$

10. Per ognuna delle seguenti grammatiche, di cui è dato l'insieme delle produzioni, trovare un automa che riconosca il linguaggio generato.

- a) P1: $\{S \rightarrow a \mid a + S\}$
- b) P2: $\{S \rightarrow aS \mid bA, A \rightarrow cA \mid \varepsilon\}$
- c) P3: $\{S \rightarrow 0A \mid 0C, A \rightarrow 0B \mid 1D, B \rightarrow A \mid \varepsilon, C \rightarrow S \mid 1D, D \rightarrow B \mid \varepsilon\}$