Prova di Logica Matematica 8 gennaio 2020 Versione 1

Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ______________________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti e numerabili? 2 punti

■ $\{s \in \mathbb{Q}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$

□ $\{s \in \{0, 1/2\}^{<\mathbb{N}} \mid \mathrm{lh}(s) = 2 \wedge s(1) = 1/2\}$

□ $\{s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$

□ $\{s \in \mathbb{R}^{<\mathbb{N}} \mid s(1) = 1/2\}$

(b) Sia $f\colon A \to B$ iniettiva. 2 punti

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

□ Se $g\colon B \to A$ è iniettiva, allora f è biettiva.

■ Se B è finito allora A è finito.

□ Per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ è non vuoto.

□ $|B| \leq |A|$.

(c) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 2 punti

■ $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$.

□ La formula $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall y \exists x R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.

■ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$ è soddisfacibile, ma non valida.

□ La formula $\forall y \exists x R(x, y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x, y)$ è insoddisfacibile.

(d) Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ formule proposizionali. Quali delle seguenti affermazioni sono certamente vere? 2 punti

□ $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R} \models \mathrm{P} \to \mathrm{R}$

■ Se $\mathrm{P} \models \mathrm{Q}$ e $\mathrm{Q} \models \mathrm{R}$ allora $\mathrm{P} \models \mathrm{R}$.

■ Se P è una contraddizione allora $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \models \mathrm{R}$.

■ Se P è una tautologia e $\mathrm{P} \models \neg \mathrm{Q}$ allora Q è una contraddizione.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 6 punti

Siano

$$
\begin{aligned}
P_1 &: \quad C \vee \neg A \\
P_2 &: \quad A \to B \\
P_3 &: \quad \neg C \to \neg B.
\end{aligned}
$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $P_1, P_2 \models P_3$
- $P_3, P_1 \models P_2$
- $P_2, P_3 \models P_1$.

Soluzione: Innanzi tutto calcoliamo la tavola di verità:

A	B	C	P_1	P_2	P_3
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V

Se A, C sono false e B è vera, allora P_1, P_2 sono vere, ma P_3 è falsa, quindi $P_1, P_2 \not\models P_3$.
Se A, C sono vere e B è falsa, allora P_1, P_3 sono vere, ma P_2 è falsa, quindi $P_3, P_1 \not\models P_2$.
Invece $P_2, P_3 \models P_1$.

Esercizio 3 6 punti

1. Formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   x è un numero primo

   utilizzando il linguaggio formato dai simboli $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale.
2. Utilizzando il linguaggio formato dai simboli $<$, $+$, $\cdot$ e 1 interpretati nella maniera usuale, formalizzare in $\mathbb{N}$ la frase

   Per ogni $n > 1$ c'è almeno un primo compreso tra n e $2n$.

Soluzione:

1. Una possibile formalizzazione è $\varphi(x)$

$$\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1).$$

2. Una possibile formalizzazione è $\forall w[1 < w \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge w < x \wedge x < w + w)]$, cioè

$$\forall w[1 < w \rightarrow \exists x(\neg(x = 1) \wedge \forall y \forall z (y \cdot z = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1) \wedge w < x \wedge x < w + w)]$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binaria. Sia φ l'enunciato

$$\exists x \exists y(\neg(x = y) \wedge \forall z \neg P(z, x) \wedge \forall z \neg P(z, y)).$$

Determinare in quali delle seguenti strutture φ è vera:

1. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{A}}$ è la relazione $<$.
2. $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, P^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{B}} = \{(n, m) \mid n \text{ divide } m \text{ e } n \neq m\}$.
3. $\mathcal{C} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, P^{\mathcal{C}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{C}}$ è la relazione $\subset$.

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. L'enunciato φ asserisce in $\mathcal{A}$ che ci sono due numeri distinti n, m tali che $k \not< n$ e $k \not< m$ per ogni k, cioè $\forall k(n \leq k)$ e $\forall k(m \leq k)$. In altre parole: esistono due minimi distinti, il che è falso.

2. L'enunciato φ asserisce in $\mathcal{B}$ che ci sono due numeri distinti n, m tali che sono minimali rispetto alla relazione di divisibilità. Questo è vero, basta prendere due numeri primi.

3. L'enunciato φ asserisce in $\mathcal{C}$ che ci sono insiemi distinti che sono minimali rispetto all'inclusione. Questo è vero: basta prendere due singoletti.

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k + 1 = n(2n + 3).$$

Soluzione:

Passo base $(n = 1)$**.** $\sum_{k=1}^{1} 4k + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3)$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{k=1}^{n} 4k + 1 = n(2n + 3)$.

Tesi induttiva: $\sum_{k=1}^{n+1} 4k + 1 = (n + 1)(2(n + 1) + 3)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 4k + 1 &= (\sum_{k=1}^{n} 4k + 1) + (4(n + 1) + 1) \\
&= n(2n + 3) + 4(n + 1) + 1 && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
&= 2n^2 + 7n + 5
\end{aligned}$$

e $(n + 1)(2(n + 1) + 3) = (n + 1)(2n + 5) = 2n^2 + 7n + 5$.