Logica Matematica
2.4 – Cenni di Cardinalità

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Quantità

Se vogliamo confrontare due insiemi *finiti*, possiamo determinare quale sia il più grande semplicemente contandone gli elementi.

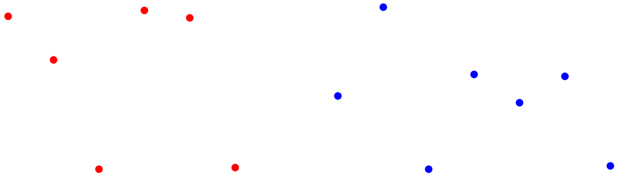
Cosa possiamo dire se vogliamo invece confrontare due insiemi infiniti?

Ad esempio, è più grande l'insieme $\mathbb{N}$ oppure l'insieme $\mathbb{Q}$? E che dire di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$? L'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in Java è più o meno grande dell'insieme $\mathbb{N}$?

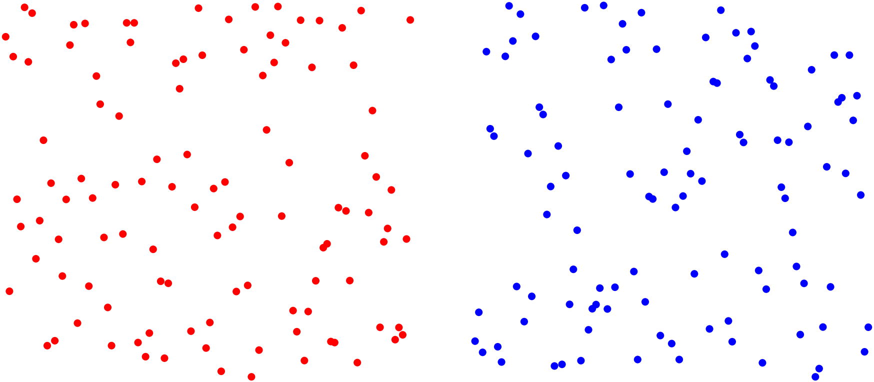
Certamente non possiamo pensare di "contarne" gli elementi, visto che sono insiemi infiniti...

Abbiamo bisogno di una tecnica diversa
per stabilire **quanti** elementi contiene un insieme!

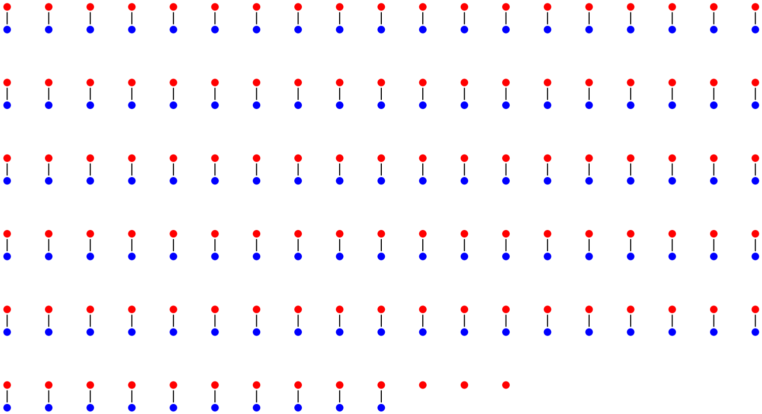
In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



In questa immagine ci sono più punti rossi o più punti blu?



Ora è facile rispondere: ci sono più punti rossi! La diversa disposizione ci permette di "accoppiare" gli elementi dei due insiemi (ovvero di stabilire una corrispondenza univoca) e di notare che ci sono 3 punti rossi in più.

Questo piccolo esempio mostra chiaramente che per confrontare la grandezza (in termini di quantità di elementi) di due insiemi la cosa più naturale da fare è quella di tentare di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi: i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi se e solo se esiste una biezione tra di essi.

Questo metodo, non richiedendo più di "contare" il numero di elementi,
si può applicare senza alcun problema agli insiemi infiniti,
e ci porta al concetto fondamentale di **cardinalità**.

Cardinalità

Definizione

Due insiemi X e Y hanno la stessa **cardinalità** se esiste una biezione $f\colon X \to Y$.

Scriveremo
$$X \approx Y,$$
oppure
$$|X| = |Y|$$
per indicare che X e Y hanno la stessa **cardinalità**.

Esercizio

La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza.

Insiemi finiti e infiniti

Definizione

Un insieme è **finito** se e solo se è in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (dove poniamo $\{0, \ldots, n-1\} = \emptyset$ quando $n = 0$).

Se X è finito ed in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$ scriveremo

$$|X| = n.$$

Un insieme che non è finito si dice **infinito**.

Osservazione

Se $|X| = n$ e $|Y| = m$, allora $|X \times Y| = n \cdot m$.
Se inoltre $X \cap Y = \emptyset$, allora $|X \cup Y| = n + m$.

Ordine tra le cardinalità

Definizione

X **si inietta in** Y se esiste una iniezione $f \colon X \to Y$. In questo caso scriveremo

$$X \precsim Y$$

oppure

$$|X| \leq |Y|.$$

Scriveremo $X \prec Y$ (oppure $|X| < |Y|$) quando $X \precsim Y$ ma $Y \not\precsim X$.

Esercizio

$\precsim$ è un preordine sugli insiemi (ossia è una relazione riflessiva e transitiva).

Osservazione

Se $X \approx Y$, allora $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$. Infatti, $X \approx Y$ se esiste una biezione $f \colon X \to Y$: ma allora f stessa mostra anche che $X \precsim Y$, mentre $f^{-1} \colon Y \to X$, che è a sua volta una biezione, dimostra che $Y \precsim X$.

Proposizione

Sia $X \neq \emptyset$. Allora $X \precsim Y$ se e solo se c'è una suriezione $g\colon Y \to X$.

Quindi per dimostrare che $|X| \leq |Y|$ possiamo mostrare che esiste una iniezione da X in Y oppure, equivalentemente, che esiste una suriezione da Y su X.

Dimostrazione.

Sia $f\colon X \to Y$ iniettiva e fissiamo un arbitrario $x_0 \in X$. Allora possiamo definire una suriezione $g\colon Y \to X$ ponendo

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{se } y \in f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \\ x_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Viceversa, se $g\colon Y \to X$ è una suriezione, allora per ogni $x \in X$ si ha $g^{-1}(x) \neq \emptyset$. Quindi possiamo definire una funzione $f\colon X \to Y$ che scelga per ogni $x \in X$ un punto in $g^{-1}(x)$: tale funzione è necessariamente iniettiva. $\square$

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

Abbiamo osservato che se $X \approx Y$, allora $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$.

Dimostreremo ora che vale anche il viceversa: se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$, allora $X \approx Y$, ovvero $\approx$ è la relazione d'equivalenza indotta dal preordine $\precsim$.

Questo fatto non è per nulla ovvio:

Esempio

Siano $X = [0;1]$ e $Y = (0;1)$. Allora si ha che $(0;1) \precsim [0;1]$ perché $(0;1) \subseteq [0;1]$. Inoltre, la funzione

$$f\colon [0;1] \to (0;1), \qquad x \mapsto \frac{x+1}{3}$$

è chiaramente iniettiva e dimostra che $[0;1] \precsim (0;1)$.

Tuttavia, non è così immediato vedere come si possa definire una *biezione* tra $[0;1]$ e $(0;1)$. (Dove mandiamo gli estremi 0 e 1 di X?)

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

La relazione d'equivalenza associata a $\precsim$ è proprio $\approx$.

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ *allora* $X \approx Y$*.*

In altre parole $|X| \leq |Y| \leq |X|$ se e solo se $|X| = |Y|$.

Idea della dimostrazione

Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ iniezioni. Definiamo

$$X_0 = X \qquad\qquad Y_0 = Y$$

$$X_{n+1} = g[Y_n] \qquad\qquad Y_{n+1} = f[X_n]$$

Siano $X_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $Y_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Definiamo

$$A = X_\infty \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X_{2i} \setminus X_{2i+1}) \qquad \text{e} \qquad B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}).$$

(continua)

Idea della dimostrazione. (continuazione)

Si verifica che (la restrizione ad A di) f è una biezione tra A e $Y \setminus B$, mentre (la restrizione a B di) g è una biezione tra B e $X \setminus A$. Allora la funzione

$$h\colon X \to Y, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus A \end{cases}$$

è una biezione. □

Negli Approfondimenti si trova una dimostrazione completa e dettagliata del teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.

Corollario

Se $X \subseteq Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$.

Dimostrazione.

Se $X \subseteq Y$ allora l'iniezione $f\colon X \to Y$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in X$ mostra che $X \precsim Y$. Dall'ipotesi $Y \precsim X$ e dal teorema di Cantor-Schröder-Bernstein segue che $X \approx Y$. □

Insiemi infiniti

X è infinito se e solo se $\mathbb{N} \precsim X$. In particolare $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme infinito: se X è infinito $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

Dimostrazione.

Se $\mathbb{N} \precsim X$, X è chiaramente infinito poiché non esiste una suriezione di $\{0, \ldots, n-1\}$ con $\mathbb{N}$, e quindi a maggior ragione con X, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(continua)

Dimostrazione. (continuazione)

Viceversa, assumiamo che X sia infinito. Siccome in particolare $X \neq \emptyset$ (altrimenti X sarebbe finito), esiste qualche $a_0 \in X$. Ma poiché X è infinito, anche $X \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$ (altrimenti $X = \{a_0\}$ sarebbe finito), per cui esiste $a_1 \in X \setminus \{a_0\}$. Poiché X è infinito, anche $X \setminus \{a_0, a_1\} \neq \emptyset$ (altrimenti $X = \{a_0, a_1\}$ sarebbe finito), per cui esiste $a_2 \in X \setminus \{a_0, a_1\}$. Più in generale, se abbiamo già definito $a_0, \dots, a_n \in X$, possiamo ancora usare il fatto che X sia infinito per osservare che $X \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ (altrimenti $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ sarebbe finito), per cui esiste $a_{n+1} \in X \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \neq \emptyset$. Proseguendo in questo modo, costruiamo una successione infinita $a_0, a_1, \dots$ di elementi di X a due a due distinti. Otteniamo quindi la funzione iniettiva

$$f \colon \mathbb{N} \to X, \qquad n \mapsto a_n.$$

$\square$

Due insiemi finiti sono in biezione se e solo se hanno lo stesso numero di elementi. In particolare, non esiste alcuna iniezione (quindi nemmeno una biezione) tra un insieme finito e un suo sottoinsieme proprio.

Questo segue dal

Principio dei cassetti

Se $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, in qualunque modo si dispongano m oggetti in n cassetti, ci sarà almeno un cassetto che contiene più di un oggetto.

Una riformulazione più "matematica" è la seguente:

Sia X un insieme finito con m elementi e Y un insieme finito con n elementi. Se $m > n$, allora per ogni $f \colon X \to Y$ esistono $x, x' \in X$ distinti tali che $f(x) = f(x')$.

Nel nostro caso: se X è un qualunque insieme finito con m elementi e Y un suo sottoinsieme proprio, allora il numero n di elementi di Y è strettamente minore di m: quindi non ci può essere nessuna iniezione (e tantomeno una biezione) $f \colon X \to Y$.

Al contrario, la funzione f definita da $f(n) = n + 1$ è una biezione tra $\mathbb{N}$ ed il suo sottoinsieme proprio $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ (più in generale: $\mathbb{N}$ è in biezione con ogni suo sottoinsieme infinito). Questa è una caratteristica degli insiemi infiniti:

Proposizione

Un insieme X è infinito se e solo se esiste $Y \subset X$ tale che $Y \approx X$.

Dimostrazione.

Se X ha n elementi e $Y \subset X$, non si può avere $Y \approx X$ perché Y ha al più $n - 1$ elementi. Se X è infinito, allora esiste una iniezione $j \colon \mathbb{N} \to X$. Sia $Y = X \setminus \{j(0)\}$. Allora $Y \subset X$ e si ottiene una biezione $f \colon X \to Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin \operatorname{rng}(j) \\ j(n+1) & \text{se } x = j(n). \end{cases} \qquad \square$$

Insiemi numerabili

Definizione

Un insieme si dice **numerabile** se è in biezione con $\mathbb{N}$, ossia se la sua cardinalità è la più piccola tra quelle infinite.

Osservazione

In particolare se $f\colon \mathbb{N} \to X$ è suriettiva, allora X è finito oppure numerabile. (Infatti, dall'esistenza di f segue che $X \precsim \mathbb{N}$. Se X è infinito, si ha anche $\mathbb{N} \precsim X$, per cui $X \approx \mathbb{N}$ per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.)

Per dimostrare che un insieme X è numerabile è sufficiente **enumerare** X, ovvero elencare i suoi elementi in una successione infinita

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

in cui ogni elemento di X compaia una e una sola volta. Infatti, una tale lista definisce in realtà la biezione

$$f\colon \mathbb{N} \to X, \qquad n \mapsto x_n.$$

Esempio

La funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0 \\ -2z-1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

è una biezione. Quindi $\mathbb{Z}$ è numerabile.

Alternativamente, si può enumerare $\mathbb{Z}$ in questo modo:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots, -n, n, \ldots$$

Esercizio

Verificare che la biezione indotta da tale enumerazione è la funzione inversa della biezione f definita nell'esempio.

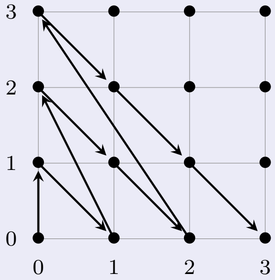
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Dimostriamo ora che: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Dimostrazione 1.

L'**enumerazione diagonale** o **triangolare** è ottenuta enumerando $\mathbb{N}^2$ secondo l'ordinamento

$$(x, y) \lhd_T (x', y') \Leftrightarrow x + y < x' + y' \vee [x + y = x' + y' \wedge x < x'],$$

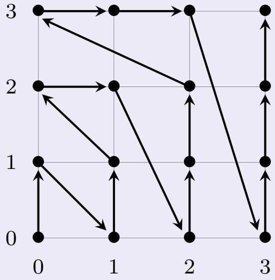


$\square$

Dimostrazione 2.

L'**enumerazione quadrata** è ottenuta enumerando $\mathbb{N}^2$ secondo l'ordinamento

$$(x,y) \lhd_Q (x',y') \Leftrightarrow \big(\max(x,y) < \max(x',y') \\ \vee [\max(x,y) = \max(x',y') \wedge (x < x' \vee [x = x' \wedge y < y'])]\big),$$



Dimostrazione 3.

Abbiamo già dimostrato che la funzione

$$f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto 2^n \cdot (2m + 1) - 1$$

è una biezione. □

Osservazione

Più in generale si dimostra che, a differenza di ciò che succede per gli insiemi finiti, per ogni insieme X infinito si ha $|X \times X| = |X|$. La dimostrazione di questo risultato però non è per nulla banale.

Corollario

$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$ per ogni $n \geq 1$. Analogamente, $|X^n| = |X|$ per ogni X infinito.

Vediamo come si costruisce una biezione tra $\mathbb{N}^3$ e $\mathbb{N}$. Sia $h_2 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una qualunque biezione. Definiamo $h_3 \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ponendo

$$h_3(n, m, k) = h_2(h_2(n, m), k)$$

Si verifica facilmente che la funzione h_3 è una biezione. Infatti, h_3 si può scrivere come $h_2 \circ (h_2 \times \mathrm{Id})$, dove Id è la funzione identità su $\mathbb{N}$.

Più in generale, per ogni $n > 2$ la funzione

$$h_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto h_2(h_2(\dots h_2(h_2(x_1, x_2), x_3), \dots), x_n)$$

è una biezione.

Si può verificare che $h_{n+1} = h_2 \circ (h_n \times \mathrm{Id})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ è numerabile, ovvero $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ dato che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

La funzione

$$g\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad (n, m) \mapsto \frac{n}{m+1}$$

è una suriezione perché ogni numero razionale q si può sempre rappresentare come rapporto tra due numeri interi $n/(m+1)$ con denominatore $(m+1)$ strettamente positivo. Perciò $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$.

Attenzione! g non è iniettiva, ad esempio $g(-2, 2) = -\frac{2}{3} = g(-4, 5)$.

Fatto cruciale

Poiché il prodotto di due biezioni è ancora una biezione, se $|X| = |Y|$ e $|Z| = |W|$ allora $|X \times Z| = |Y \times W|$.

Quindi $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, da cui $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è numerabile

Ricordiamo che $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di numeri naturali, ovvero $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ (con la convenzione che $\mathbb{N}^0 = \{\varepsilon\}$, dove ε è l'unica sequenza vuota).

Proposizione

$|\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$.

Per il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, per ottenere una biezione tra $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ed $\mathbb{N}$ è sufficiente dimostrare che $\mathbb{N} \precsim \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ e $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \precsim \mathbb{N}$.

La funzione

$$g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \qquad n \mapsto \langle n \rangle$$

è chiaramente iniettiva, quindi $\mathbb{N} \precsim \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Per definire una funzione iniettiva $f\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ procediamo nel modo seguente:

Sia $\langle \boldsymbol{p}_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ l'enumerazione di tutti i numeri primi, cioè $\boldsymbol{p}_0 = 2$, $\boldsymbol{p}_1 = 3$, $\boldsymbol{p}_2 = 5$, ...

Data una sequenza non vuota $s = \langle m_0, m_1, \dots, m_k \rangle \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ costruiamo il numero non nullo

$$f(s) = \boldsymbol{p}_0^{m_0+1} \cdot \boldsymbol{p}_1^{m_1+1} \cdots \boldsymbol{p}_k^{m_k+1}$$

e poniamo $f(\varepsilon) = 0$. Per la fattorizzazione unica, la funzione $f\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

Osservazione

Se avessimo posto semplicemente $f(s) = \boldsymbol{p}_0^{m_0} \cdot \boldsymbol{p}_1^{m_1} \cdots \boldsymbol{p}_k^{m_k}$ la funzione non sarebbe stata iniettiva perché ad esempio

$$f(\langle 0 \rangle) = 2^0 = 1 = 2^0 \cdot 3^0 = f(\langle 0, 0 \rangle).$$

Sequenze finite

Più in generale, dato un insieme non vuoto X indichiamo con $X^{<\mathbb{N}}$ l'insieme delle sequenze finite $s = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ di elementi di X. Più precisamente $X^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$, con la solita convenzione $X^0 = \{\varepsilon\}$, dove $\varepsilon = \langle\rangle$ è la sequenza vuota. Abbiamo visto che se X è infinito allora $X^{<\mathbb{N}}$ è infinito, poiché il suo sottoinsieme $X^1 = \{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ è in biezione con X, e quindi è esso stesso infinito.

L'insieme $X^{<\mathbb{N}}$ è infinito (indipendentemente dal fatto che X sia finito o infinito).

Infatti, dato qualunque $a \in X$ si può considerare l'iniezione

$$f \colon \mathbb{N} \to X^{<\mathbb{N}}, \qquad n \mapsto \langle \underbrace{a, a, \dots, a}_{n \text{ volte}} \rangle.$$

Esercizio

Dimostrare che se X è finito allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme X^n è finito. Quanti elementi ha X^n?

Cardinalità dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$

Sia X un insieme non vuoto. Ricordiamo che 2^X è l'insieme di tutte le funzioni da X in $\{0,1\}$, e che è in biezione con l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X. In particolare, ne segue che se X è finito e ha n elementi allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi, da cui

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

Dimostreremo ora che questa proprietà continua a valere anche quando X è infinito.

Il teorema di Cantor

Chiaramente $X \precsim \mathcal{P}(X)$ poiché $X \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva.

Teorema (Cantor)

Non esiste alcuna suriezione da X su $\mathcal{P}(X)$. Quindi $\mathcal{P}(X) \not\precsim X$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che esista una suriezione $g \colon X \to \mathcal{P}(X)$ e sia

$$Y = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Fissiamo un $\bar{x} \in X$ tale che $g(\bar{x}) = Y$. Allora

$$\bar{x} \in Y \text{ se e solo se } \bar{x} \notin g(\bar{x}) = Y,$$

contraddizione. $\square$

Quindi per ogni insieme X non vuoto si ha $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Alcune osservazioni

In particolare $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non è in biezione con $\mathbb{N}$, ovvero $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, e lo stesso vale quando $\mathbb{N}$ viene sostituito da $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e così via.

Inoltre, vale il fatto seguente:

Ogni iniezione (suriezione, biezione) $f \colon X \to Y$ induce in maniera canonica la funzione iniettiva (suriettiva, biettiva)

$$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Di conseguenza

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|.$$

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Teorema

$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. In particolare, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$.

Poiché

$$|2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|,$$

è sufficiente dimostrare che $2^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Data $f \in 2^{\mathbb{N}}$, sia x_f il numero reale con espansione decimale

$$0, n_0 n_1 n_2 \ldots$$

dove $n_i = f(i) + 1$. Chiaramente $x_f \in (0;1)$ e se $f, f' \in 2^{\mathbb{N}}$ sono distinte allora $x_f \neq x_{f'}$. Quindi la funzione

$$2^{\mathbb{N}} \to (0;1), \qquad f \mapsto x_f$$

dimostra che $2^{\mathbb{N}} \precsim (0;1) \subseteq \mathbb{R}$.

Per dimostrare che $\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, utilizziamo il seguente

Fatto

I razionali sono densi in $\mathbb{R}$, ovvero se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $x < y$ allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che
$$x < q < y.$$

Consideriamo la funzione
$$\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \qquad r \mapsto A_r = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

Per la densità dei razionali in $\mathbb{R}$, tale funzione è iniettiva: se $r < r'$ allora preso $q \in \mathbb{Q}$ tale che $r < q < r'$ si ha che $q \in A_{r'} \setminus A_r$. Quindi $\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema, ovvero del fatto che
$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Alcune osservazioni

Si ricordi che nella prima parte abbiamo in realtà dimostrato che $2^{\mathbb{N}} \precsim (0;1)$. Poiché ora abbiamo anche che $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$, questo vuol dire che $\mathbb{R} \precsim (0;1)$. Ma poiché $(0;1) \subseteq \mathbb{R}$, si ha che

$$\mathbb{R} \approx (0;1),$$

ovvero che l'intera retta reale $\mathbb{R}$ e l'intervallo aperto $(0;1)$ hanno lo stesso numero di punti.

Questo fatto può essere anche dimostrato geometricamente utilizzando la **proiezione stereografica**.

Corollario

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha che

$$\mathbb{R} \approx [a;b] \approx [a;b) \approx (a;b] \approx (a;b).$$

Alcune osservazioni

Poiché $\mathbb{R}$ è un insieme infinito, si ha che

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R},$$

ovvero che la retta reale e il piano cartesiano hanno lo stesso numero di punti.

C'è anche una semplice suriezione di $[0;1]$ su $[0;1] \times [0;1]$ che permette di ottenere in modo esplicito lo stesso risultato: per esempio la funzione che assegna (modulo la opportuna attenzione ai numeri che ammettono due espansioni decimali) al numero $x = 0, x_0 x_1 x_2 x_3 \dots$ la coppia (y, z) dove

$$y = 0, x_0 x_2 x_4 x_6 \dots x_{2i} \dots \quad \text{e} \quad z = 0, x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 \dots x_{2i+1} \dots$$

Utilizzando il fatto che l'iniezione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ testimonia $\mathbb{R} \precsim \mathbb{R}^2$, si ottiene quindi

$$\mathbb{R} \precsim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx [0;1] \times [0;1] \precsim [0;1] \subseteq \mathbb{R}.$$

Esercizi

Esercizio

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}$. Spiegare perché da questo segue anche $[a;b] \approx [a;b]^n$ e $(a;b) \approx (a;b)^n$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$.

Esercizio

Dimostrare che se Y è un insieme infinito e X è tale che $|X| \leq |Y|$, allora

$$|X \cup Y| = |X \times Y| = |Y|.$$

Suggerimento. Utilizzare il fatto che, essendo Y infinito, si ha $|Y \times Y| = |Y|$.

Esercizio

Dimostrare che date due circonferenze C_1, C_2 si ha $|C_1| = |C_2|$ e che $|C_1| = |\mathbb{R}|$.

Esercizio

Sia $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le funzioni $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

1. Dimostrare che la funzione
$$F \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \qquad f \mapsto \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = f(n)\}$$
è iniettiva.
2. Utilizzando quanto visto a lezione, dimostrare che
$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|.$$

Esercizio

Dimostrare che gli insiemi

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è iniettiva}\}$$

e

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è suriettiva}\}$$

sono in biezione con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Concludere che anche l'insieme

$$\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ è biettiva}\}$$

ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Esercizio

Dimostrare che l'insieme di tutte le rette nel piano cartesiano è in biezione con $\mathbb{R}$.

Esercizio

Dimostrare che l'insieme delle sequenze binarie finite (ovvero l'insieme di tutte le sequenze finite di 0 e 1) è un insieme numerabile.

Esercizio

Più in generale, dimostrare che se X è finito o numerabile, allora $X^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

Sia X un insieme non vuoto. Una sequenza $s = \langle s_0, \dots, s_n \rangle \in X^{<\mathbb{N}}$ *contiene ripetizioni* se in s c'è almeno un elemento ripetuto due volte, ovvero se esistono $0 \leq i < j \leq n$ tali che $s_i = s_j$. Se ciò non accade diciamo che s è *senza ripetizioni*.

Esercizio

Dimostrare che per ogni insieme X infinito, l'insieme

$$\{s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ è senza ripetizioni}\}$$

è un insieme infinito. Dimostrare anche che se X è numerabile, allora anche l'insieme delle sequenze senza ripetizioni lo è.

Esercizio

Dimostrare che se invece X è finito, allora l'insieme delle sequenze $s \in X^{<\mathbb{N}}$ senza ripetizioni è un insieme finito. (Facoltativo: quanti elementi ha?)

Esercizio

Dimostrare che per ogni insieme X non vuoto, l'insieme

$$\{s \in X^{<\mathbb{N}} \mid s \text{ contiene ripetizioni}\}$$

è un insieme infinito, e che se X è numerabile allora anche l'insieme delle sequenze contenenti ripetizioni lo è.

Esercizio

Dimostrare che l'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in un dato linguaggio di programmazione è numerabile.

Approfondimenti

Il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$. In particolare, $|X| \leq |Y| \leq |X|$ se e solo se $|X| = |Y|$.

Dimostrazione.

Siano $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$ iniezioni. Definiamo

$$X_0 = X \qquad\qquad Y_0 = Y$$
$$X_{n+1} = g[Y_n] \qquad\qquad Y_{n+1} = f[X_n]$$

Per definizione di Y_{n+1}, ciascuna funzione $f \restriction X_i \colon X_i \to Y$ è iniettiva e ha range Y_{i+1}, ovvero è una biezione tra X_i e Y_{i+1}. Da questo segue che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione $f \restriction (X_{2i} \setminus X_{2i+1}) \colon X_{2i} \setminus X_{2i+1} \to Y$ è una funzione iniettiva il cui range è esattamente $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$, quindi è una biezione tra $X_{2i} \setminus X_{2i+1}$ e $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$.

(continua)

Dimostrazione. (continuazione)

Similmente, si dimostra che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione $g \restriction (Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}) \colon Y_{2i} \setminus Y_{2i+1} \to X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ è una biezione, per cui $g^{-1} \restriction (X_{2i+1} \setminus X_{2i+2})$ è una biezione tra $X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ e $Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}$.

Siano $X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ e $Y_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Mostriamo ora che la funzione $f \restriction A_\infty \colon A_\infty \to Y$ ha range B_∞, ovvero è una biezione tra A_∞ e B_∞. Se $x \in A_\infty$, allora $x \in X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi per definizione di Y_{n+1} si ha $f(x) \in Y_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $f(x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n = Y_\infty$ (il fatto che $f(x) \in Y_0$ è banale perché $Y_0 = Y$). Questo mostra che $\operatorname{rng}(f \restriction X_\infty) \subseteq Y_\infty$. Viceversa, dato $y \in Y_\infty$ allora $y \in Y_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, poiché $y \in Y_1 = f[X_0] = \operatorname{rng}(f)$ esiste un unico (visto che f è iniettiva) $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Inoltre, poiché $f^{-1}(Y_{n+1}) = X_n$, da $f(x) = y \in Y_{n+1}$ segue $x \in X_n$, perciò $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = X_\infty$. Dato che $f(x) = y$ e $x \in X_\infty$, questo dimostra he $y \in \operatorname{rng}(f \restriction X_\infty)$. Dunque anche $Y_\infty \subseteq \operatorname{rng}(f \restriction X_\infty)$, e per il principio di doppia inclusione $f \restriction X_\infty = Y_\infty$.

(continua)

Dimostrazione. (continuazione)

Dunque abbiamo dimostrato che

- per ogni $i \in \mathbb{N}$, la funzione $f \upharpoonright (X_{2i} \setminus X_{2i+1}) \colon X_{2i} \setminus X_{2i+1} \to Y$ è una biezione tra $X_{2i} \setminus X_{2i+1}$ e $Y_{2i+1} \setminus Y_{2i+2}$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, la funzione $g^{-1} \upharpoonright (X_{2i+1} \setminus X_{2i+2})$ è una biezione tra $X_{2i+1} \setminus X_{2i+2}$ e $Y_{2i} \setminus Y_{2i+1}$;
- la funzione $f \upharpoonright A_\infty \colon A_\infty \to Y$ è una biezione tra A_∞ e B_∞.

Quindi la funzione

$$h \colon X \to Y, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_\infty \\ f(x) & \text{se } x \in X_{2i} \setminus X_{2i+1} \text{ per qualche } i \in \mathbb{N} \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X_{2i+1} \setminus X_{2i+2} \text{ per qualche } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

è una biezione tra X e Y. □

Back