Corso di Laurea in Matematica
Elementi di Teoria degli Insiemi:
Prof. A. Berarducci
Prova scritta del 6 Febbraio 2013

COGNOME E NOME
MATRICOLA

Si possono assumere tutti gli assiomi della teoria degli insiemi visti a lezione.

Esercizio 1. Quante sono le partizioni di un insieme numerabile in infiniti insiemi numerabili?

Esercizio 2. Dato un insieme X, ricordiamo che un'**algebra** di sottoinsiemi di X è una famiglia di sottoinsiemi di X chiusa per unioni binarie, intersezioni binarie e complemento. Una **Σ-algebra** è un una famiglia chiusa per unioni numerabili, intersezioni numerabili, e complemento.

1. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X, si stimi la cardinalità della più piccola algebra $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ in termini di quella di $\mathcal{F}$.

2. Data una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X, si stimi la cardinalità della più piccola Σ-algebra $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ in termini di quella di $\mathcal{F}$.

Si consideri in particolare il caso in cui $\mathcal{F}$ è numerabile.

Esercizio 3. Quanti sono gli ordinali limite minori di $\aleph_1$?

Esercizio 4. Esiste un ordinale numerabile $\alpha > 0$ tale che l'insieme degli ordinali limite minori di α ha tipo d'ordine α?

Esercizio 5. Sia $<$ un buon ordine su un insieme X. Per il teorema di ricursione sappiamo che esiste una ed una sola funzione f con dominio X tale che per ogni $x \in X$, $f(x) = \{f(y) : y < x\}$. Possiamo indebolire le ipotesi supponendo che $<$ sia solamente un ordine totale anziché un buon ordine? Ad esempio esiste una tale f se $<$ è l'ordine naturale sui numeri reali non negativi?