Istruzioni esame

- Scrivere nome, cognome e matricola su OGNI foglio negli appositi spazi.
- Tutte le risposte vanno riportate sul testo d'esame, eventualmente utilizzando il retro dei fogli se necessario. Non verranno ritirati e corretti eventuali fogli di brutta.
- La prova si considera superata se si ottengono ALMENO 18 punti in totale, di cui ALMENO 5 punti nel primo esercizio (quesiti a risposta multipla).

Cognome, nome e matricola: ____________________

Esercizio 1

Rispondere alle seguenti domande a risposta multipla, segnando TUTTE le risposte corrette (per ogni domanda ci può essere una, nessuna o diverse risposte corrette).

(a) Si considerino gli insiemi $C = \{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(h(n) = h(2))\}$ e $A = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\,(h(n) \neq 2)\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ☐ $|D| = |A|$
- ☐ Tutti e tre gli insiemi sono numerabili.
- ■ $|C| < |A|$
- ■ $|C| = |D|$

(b) Sia φ la formula $R(a, a) \to (\exists z\, R(z, z) \wedge R(z, a))$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ■ Ogni variabile che occorre in φ ha almeno un'occorrenza vincolata.
- ☐ La formula φ è un enunciato.
- ■ Vi sono variabili che occorrono sia libere che vincolate in φ.
- ■ $FV(\varphi) = \{z\}$

(c) Siamo R e S formule proposizionali arbitrarie. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? — 2 punti

- ☐ Se S è soddisfacibile e R $\models$ S allora anche R deve essere soddisfacibile.
- ■ R $\vee$ (R $\to$ S) è una tautologia.
- ■ Se R è soddisfacibile e R $\models$ S allora anche S deve essere soddisfacibile.
- ☐ Se R e S sono soddisfacibili allora anche R $\wedge$ S lo è certamente.

(d) La relazione binaria "essere vicini di casa" è — 2 punti

- ☐ transitiva.
- ☐ una relazione di equivalenza.
- ☐ riflessiva.
- ■ simmetrica.

Punteggio totale primo esercizio: 8 punti

Esercizio 2 — 6 punti

Siano

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad (D \land A) \lor B \\ R_2 &: \quad C \leftrightarrow D \\ R_3 &: \quad (C \land B) \lor (C \land A). \end{aligned}$$

Determinare, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $R_1, R_2 \models R_3$
- $R_3, R_1 \models R_2$
- $R_2, R_3 \models R_1$.

Soluzione: Innanzi tutto calcoliamo la tavola di verità:

C	D	A	B	R_1	R_2	R_3
F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

$R_1, R_2 \not\models R_3$, come testimoniato dalla seconda riga in cui C, D, A sono false e B è vera.

$R_3, R_1 \not\models R_2$, come testimoniato dalla decima riga in cui C, B sono vere e D, A sono false.

$R_2, R_3 \models R_1$, come testimoniato dalle ultime tre righe.

Esercizio 3 6 punti

Formalizzare in $\mathbb{N}$ le frasi seguenti nel linguaggio avente come simboli 1, $<$, $+$ e $|$, tutti interpretati nella maniera usuale:

1. x è primo.
2. Ogni numero pari sufficientemente grande è somma di tre primi.

Soluzione: (i) Una possibile formalizzazione è data dalla formula $\varphi(x)$ seguente:

$$1 < x \wedge \forall y\,(y \mid x \rightarrow y = 1 \vee y = x).$$

(ii) Una possibile formalizzazione è

$$\exists y \forall z\,[y < z \wedge \exists w\,(w + w = z) \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\,(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \varphi(x_3) \wedge z = x_1 + x_2 + x_3)].$$

Esercizio 4 6 punti

Sia $L = \{h, k\}$ con h e k simboli di funzione binari e si consideri la L-struttura $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}, \cdot, + \rangle$. Siano $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ le formule

$$\forall w \forall x\, (h(w, x) = z \to w = z \lor x = z) \qquad \text{e} \qquad \exists w\, (\neg(w = z) \land k(w, w) = z).$$

1. Si determini $\varphi(\mathcal{C})$.
2. Si determini $\psi(\mathcal{C})$.
3. L'enunciato $\exists z\, (\varphi(z) \land \psi(z))$ è soddisfacibile?

Giustificare le proprie risposte.

Soluzione:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{C} \models \varphi[z/n]$ se e solo se n non è un numero composto (ovvero non è il prodotto di due numeri entrambi diversi da esso). Quindi

$$\varphi(\mathcal{C}) = \{0, 1\} \cup \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ è un numero primo}\}.$$

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathcal{C} \models \psi[z/n]$ se e solo se n è un numero pari diverso da 0, ovvero

$$\psi(\mathcal{C}) = \{2m \mid 0 \neq m \in \mathbb{N}\}.$$

3. L'enunciato proposto è soddisfacibile, come testimoniato da $\mathcal{C}$ stessa. Infatti si ha che $\mathcal{C} \models \exists z\, (\varphi(z) \land \psi(z))$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, simultaneamente, $\mathcal{C} \models \varphi[z/n]$ e $\mathcal{C} \models \psi[z/n]$ (equivalentemente: se e solo se $\varphi(\mathcal{C}) \cap \psi(\mathcal{C}) \neq \emptyset$). Poiché 2 è sia un numero primo che un numero pari diverso da 0, si ha che l'enunciato è soddisfatto in $\mathcal{C}$.

Esercizio 5 6 punti

Dimostrare per induzione su $k \geq 1$ che

$$\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{3k^2+k}{2}.$$

Soluzione:

Per induzione su $n \geq 1$.

Passo base $(k=1)$. $\sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{(3 \cdot 1^2+1)}{2}$.

Passo induttivo.

Ipotesi induttiva: $\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{3k^2+k}{2}$

Tesi induttiva: $\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{3(k+1)^2+(k+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{k}(3i-1)\right) + (3(k+1)-1) \\
&= \frac{3k^2+k}{2} + 3k + 2 && \text{(Ip. ind.)} \\
&= \frac{3k^2+k+6k+4}{2} \\
&= \frac{3k^2+7k+4}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{3(k+1)^2+(k+1)}{2} = \frac{3(k^2+2k+1)+k+1}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2}.$$